Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 25.4.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 20

Lösungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 1

1. *Differenzialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.* Bestimme jeweils eine (lokale) Lösung für folgende Anfangswertprobleme mit getrennten Veränderlichen.

(a) $y'(t) = 2y^3(t)$ mit $y(0) = 1$. (2)

Lösung: In allen Teilaufgaben ist der y-Teil auf der rechten Seite der DGL zumindest lokal um den Anfangswert von Null verschieden. Aus dem Satz 3.1 aus der Vorlesung folgt also, dass wir im folgenden immer die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme bestimmen. Das soll uns aber für diese Aufgabe noch nicht wichtig sein, da wir ab sofort den Existenz- & Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung als viel mächtigeres Hilfsmittel zur Verfügung haben werden. Man sieht sofort, dass alle drei Anfangswertprobleme die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen!
Wir wählen das praktische Vorgehen aus der Vorlesung. Man hat $\frac{y'(t)}{y^3(t)} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{y^2(t)} = 2$. Integrieren dieser Gleichung ergibt

$$\frac{1}{y^2(t)} - 1 = \int_0^t \frac{d}{ds}\frac{1}{y^2(s)}\,ds = -\int_0^t 4\,ds = -4t.$$

Durch Umformen der Gleichung erhält man $y^2(t) = \frac{1}{1-4t}$. Man erhält so die Lösung $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$ (Beachte, dass der negative Zweig das Anfangswertproblem nicht löst!).

(b) $y'(t) = t^3(1 + y^2(t))$ mit $y(0) = 0$. (2)

Lösung: Trennen der Veränderlichen ergibt

$$\frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} = \frac{d}{dt}\arctan y(t) = t^3.$$

Integrieren auf beiden Seiten ergibt

$$\arctan y(t) = \int_0^t \frac{d}{ds}\arctan y(s)\,ds = \int_0^t s^3\,ds = \frac{1}{4}t^4.$$

Hieraus folgt $y(t) = \tan\left(t^4/4\right)$.

(c) $y'(t) = e^{-t}\sqrt{1 - y^2(t)}$ mit $y(0) = 0$. (2)

Lösung: Trennen der Veränderlichen ergibt

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{1 - y^2(t)}} = \frac{d}{dt}\arcsin y(t) = e^{-t}.$$

Integrieren auf beiden Seiten ergibt

$$\arcsin(y(t)) = \int_0^t \frac{d}{ds}\arcsin(y(s))\,ds = \int_0^t e^{-s}\,ds = 1 - e^{-t}.$$

Durch Auflösen nach $y(t)$ erhält man $y(t) = \sin(1 - e^{-t})$.

2. *Partikuläre Lösungen raten.* Es ist manchmal möglich eine partikuläre Lösung zu raten ohne eine Variation der Konstanten durchzuführen. Wir betrachten dazu für eine Inhomogenität $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differenzialgleichung

$$y'(t) + 6y(t) = g(t)$$

(a) Bestimme die allgemeine Form der homogenen Lösung. (1)

Lösung: Nach der Vorlesung hat die allgemeine Lösung die Form $y(t) = ce^{A(t)}$, wobei A eine Stammfunktion der konstanten Funktion -6 ist. Also ist die allgemeine Form der homogenen Lösung

$$y(t) = c \cdot e^{-6t} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimme eine partikuläre Lösung für die folgenden Inhomogenitäten. Mache dazu einen geschickten Ansatz für die partikuläre Lösung und versuche eine Variation der Konstanten zu vermeiden!

(i) $g(t) = t + 3.$ (2)

Lösung: Setzen wir den Ansatz $y(t) = at + b$ in die inhomogene Gleichung ein, so erhalten wir

$$6at + (a + 6b) = a + 6(at + b) = y'(t) + 6y(t) = g(t) = t + 3.$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt, dass $6a = 1$ und $a + 6b = 3$ gelten muss. Also ist $a = \frac{1}{6}$ und $b = \frac{17}{36}$. Eine partikuläre Lösung der Gleichung ist somit

$$y(t) = \frac{1}{6}t + \frac{17}{36}.$$

(ii) $g(t) = t^3 + 2t.$ (2)

Lösung: Analog zum ersten Teil machen wir hier den Ansatz $y(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Durch Einsetzen in die Gleichung erhalten wir dieses Mal

$$\begin{aligned} 6at^3 + (3a + 6b)t^2 + (2b + 6c)t + (6d + c) &= 3at^2 + 2bt + c + 6(at^3 + bt^2 + ct + d) \\ &= y'(t) + 6y(t) = g(t) = t^3 + 2t. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$6a = 1 \qquad a + 2b = 0 \qquad b + 3c = 1 \qquad 6d + c = 0.$$

Sukzessives Lösen der Gleichungen ergibt $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{12}$, $c = \frac{13}{36}$ und $d = -\frac{13}{216}$. Eine partikuläre Lösung der Gleichung ist somit

$$y(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{13}{36}t - \frac{13}{216}.$$

(iii) $g(t) = e^t.$ (2)

Lösung: Da sich die Exponentialfunktion unter Ableiten reproduziert, machen wir hier den Ansatz $y(t) = ae^t$. Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$7ae^t = ae^t + 6ae^t = y'(t) + 6y(t) = g(t) = e^t.$$

Somit ist $a = \frac{1}{7}$. Eine partikuläre Lösung der Gleichung ist somit

$$y(t) = \frac{1}{7}e^t.$$

(iv) $g(t) = \cos t + \sin t$. (2)

Lösung: Mit demselben Argument wie bei dem vorherigen Teil bietet sich hier der Ansatz $y(t) = a\cos t + b\sin t$ an. Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}&(6b-a)\sin t + (6a+b)\cos t \\ &\qquad = -a\sin t + b\cos t + 6a\cos t + 6b\sin t = y'(t) + 6y(t) = g(t) = \cos t + \sin t.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$6b - a = 1 \qquad 6a + b = 1.$$

Dieses wird durch $b = \frac{7}{37}$ und $a = \frac{5}{37}$ gelöst. Eine partikuläre Lösung der Gleichung ist somit

$$y(t) = \frac{5}{37}\cos t + \frac{7}{37}\sin t.$$

Hinweis: Für (i) wähle etwa den Ansatz $y(t) = at + b$.

(c) Bestimme für (i) die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung. (1)

Lösung: Nach der Vorlesung erhält man die allgemeine Lösung als die Summe der allgemeinen homogenen Lösung mit einer partikulären Lösung. Somit hat die allgemeine Lösung die Form

$$y(t) = c \cdot e^{-6t} + \frac{1}{6}t + \frac{17}{36} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

3. *Automatische höhere Regularität von Lösungen.* Man kann oft aus der Struktur der Differenzialgleichung schon Eigenschaften der Lösungen ablesen ohne konkret die Lösungen zu kennen. Wir wollen hierfür ein erstes Beispiel geben.

(a) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t, y) := p(y)$. Zeige, dass jede Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall) von

$$y'(t) = f(t, y(t)) = p(y(t))$$

schon in $C^\infty(I)$ liegt, d.h. beliebig oft differenzierbar ist. (3)

Lösung: Zur Vorüberlegung: Sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung. Per Definition ist y differenzierbar, also insbesondere stetig. Daraus folgt, dass $y' = p \circ y$ als Verknüpfung stetiger Funktionen auch stetig ist. Also ist y stetig differenzierbar.

Wir zeigen nun per vollständiger Induktion, dass y beliebig oft differenzierbar ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist y n-mal differenzierbar. Für $n = 1$ folgt dies gerade aus der Definition einer Lösung. Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, y sei bereits n-mal differenzierbar. Dann ist $y' = p \circ y$ als Verknüpfung n-mal differenzierbarer Funktionen n-mal differenzierbar. Somit ist aber y $(n+1)$-mal differenzierbar.

Hinweis: Versuche zuerst zu zeigen, dass jede Lösung schon stetig differenzierbar ist. Zeige die Aussage der Aufgabe per vollständiger Induktion.

(b) Gebe ein Beispiel für ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig so, dass die Gleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt, die nicht beliebig oft differenzierbar ist. (1)

Lösung: Wir haben bereits in der Vorlesung bei der Diskussion über die Nichteindeutigkeit ein solches Beispiel gesehen. Alternativ betrachte $f(t, y) = |t|$. Dann ist eine Lösung von $y'(t) = f(t, y(t)) = |t|$ gerade eine Stammfunktion von $t \mapsto |t|$. Diese sind aber offensichtlich nicht beliebig oft differenzierbar.