Übungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 2

4. *Gradientenfelder.* Welche der folgenden stetigen Vektorfelder $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) sind Gradientenfelder, d.h. es gibt ein $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{grad} \varphi = F$? Geben Sie, falls existent, eine solche Stammfunktion φ an!

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = (7y^2 e^x - 3\sin y \sin x, 14ye^x - 3\cos y \cos x)^T$. (2)

(b) $F : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = (2xe^{x^2+y^3}, 3y^2 e^{x^2+y^3})^T$. (2)

(c) $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})^T$. (2)

5. *Exakte Differenzialgleichungen.* Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $2y(t)y'(t) + ty'(t) + y(t) = 0$ mit $y(1) = 1$. (3)

(b) $\frac{ty'(t)}{1+(ty(t))^2} + \frac{y(t)}{1+(ty(t))^2} - 3e^t = 0$ mit $y(1) = 0$. (3)

6. *Logistisches Wachstum.* Die Differenzialgleichung des logistischen Wachstums ist gegeben durch

$$y'(t) = cy(t)(M - y(t))$$

mit Konstanten $c, M \in \mathbb{R}$. Sie beschreibt im Modellfall $c > 0$ und $M > 0$ mit einem Anfwangswert $y_0 \in (0, M)$ das Wachstum einer Population, bei der die Population durch Umwelteinflüsse nach oben beschränkt ist. Dabei wird im Modell angenommen, dass das Populationswachstum proportional zum momentanen Bestand der Population (wie beim exponentiellen Wachstum) und zu der noch vorhandenen Kapazität des Lebensraums ist.

(a) Erläutere anhand der Gleichung in Worten, wie sich das Wachstum der Population im oberen Modellfall bei

- bei sehr kleinen (positiven) Populationsgrößen,
- bei $y(t) \approx M/2$,
- bei Populationsgrößen minimal geringer als M

verhalten sollte. Skizziere dann einen beispielhaften Verlauf einer Lösung der Differenzialgleichung für sehr kleine positive Anfangswerte. (2)

(b) Bestimme die allgemeine Form der Lösung der Differenzialgleichung mit Anfangswert $y(0) = y_0$ für $y_0 \geq 0$. (3)

(c) Zeigen Sie, dass im Modellfall für eine Lösung y der Differenzialgleichung $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existiert und bestimme den Grenzwert. Was bedeuet das anschaulich? (1)

(d) Zeige, dass im Modellfall die Lösung y für das Anfangswertproblem $y(0) = y_0$ mit $y_0 \in (0, M/2)$ einen eindeutigen Wendepunkt zu einer Zeit $t_0 > 0$ besitzt. Berechne die Größe der Population zum Zeitpunkt t_0. (2)