Lösungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 2

4. *Gradientenfelder.* Welche der folgenden stetigen Vektorfelder $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) sind Gradientenfelder, d.h. es gibt ein $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{grad} \varphi = F$? Geben Sie, falls existent, eine solche Stammfunktion φ an!

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (7y^2 e^x - 3 \sin y \sin x, 14ye^x - 3 \cos y \cos x)^T$. (2)

Lösung: Nehmen wir an, eine solche Stammfunktion φ würde existieren. Da dann $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ gelten müsste, hätte man nach dem Satz von Schwarz insbesondere $\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} F_2$. Diese *notwendige* Bedingung haben wir in der Vorlesung als die sogenannte *Integrabilitätsbedingung* kennengelernt. In dieser Aufgabe ist

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = 14ye^x - 3 \cos y \sin x,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) = 14ye^x + 3 \cos y \sin x.$$

Somit kann keine Stammfunktion φ existieren, F ist also kein Gradientenfeld!

Hinweis: Wenn man explizit eine solche Stammfunktion φ finden soll, ist es in der Praxis effektiver, einfach durch Rechnen zu versuchen, eine Stammfunktion zu bestimmen. Ist das Feld kein Gradientenfeld, so wird man während der Rechnung einen Widerspruch erhalten, was ebenfalls zeigt, dass keine Stammfunktion exisitiert. Wir werden dieses Vorgehen in den nächsten beiden Teilaufgaben verdeutlichen.

(b) $F : (0, 1)^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (2xe^{x^2+y^3}, 3y^2 e^{x^2+y^3})^T$. (2)

Lösung: Durch Nachrechnen würde man feststellen, dass F der Integrabilitätsbedingung genügt. Da $(0, 1)^2$ einfach zusammenhängend ist (wir begnügen uns hier mit der anschaulichen Begründung, dass $(0, 1)^2$ keine Löcher hat), besitzt F nach einem Satz aus der Vorlesung eine Stammfunktion. Wir bestimmen diese nun explizit. Angenommen, φ sei eine solche Stammfunktion. Dann gilt

$$\varphi_x(x, y) = F_1(x, y) = 2xe^{x^2+y^3} \quad \Rightarrow \varphi(x, y) = e^{x^2+y^3} + f(y)$$

mit einer nur von y abhängigen Funktion $f \in C^\infty(0, 1)$. Betrachten der zweiten partiellen Ableitung ergibt

$$\varphi_y(x, y) = 3y^2 e^{x^2+y^3} + f_y(y) = F_2(x, y) = 3y^2 e^{x^2+y^3}.$$

Aus dieser Gleichung folgt $f_y(y) = 0$. Also sind alle Stammfunktionen von der Form $\varphi(x, y) = e^{x^2+y^3} + c$ für eine feste Konstante $c \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist F ein Gradientenfeld.

(c) $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})^T$. (2)

Lösung: Durch Nachrechnen

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

sieht man, dass F die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Da Ω ein Loch in der Null besitzt und damit nicht einfach zusammenhängend ist, folgt aus dem Satz aus der Vorlesung jedoch nicht, dass F eine Stammfunktion besitzt. Tatsächlich existiert auch gar keine Stammfunktion, was wir im folgenden zeigen.
Angenommen, φ sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\varphi_x(x,y) = F_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{y}\frac{1}{1+(x/y)^2} = -\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

für $y \neq 0$. Für $y \neq 0$ gilt also $\varphi(x,y) = -\arctan(x/y) + f(y)$, wobei $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{(x,y) : y = 0\})$. Wir betrachten nun die zweite partielle Ableitung und sehen, dass

$$\varphi_y(x,y) = \frac{x}{y^2}\frac{1}{1+(x/y)^2} + f_y(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + f_y(y) = F_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

gelten muss. Demnach sind für $y \neq 0$ alle Stammfunktionen durch $\varphi(x,y) = -\arctan(x/y) + c_i$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei die Konstante von der Halbebene abhängen kann (da $\mathbb{R} \setminus \{(x,y) : y = 0\}$ nicht zusammenhängend ist). Diese besitzen aber unabhängig von der Wahl von c_1 und c_2 keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, da ansonsten

$$\begin{aligned} \lim_{y\downarrow 0}\varphi(1,y) &= \lim_{y\uparrow 0}\varphi(1,y) && \Rightarrow c_1 - c_2 = \pi \\ \lim_{y\downarrow 0}\varphi(-1,y) &= \lim_{y\uparrow 0}\varphi(-1,y) && \Rightarrow c_1 - c_2 = -\pi. \end{aligned}$$

gelten würde. Somit besitzt F auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion.
Alternativ kann man folgendermaßen argumentieren (falls bekannt): Würde F eine Stammfunktion besitzen, so hätte man für das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B_1(0)} F\,ds = 0.$$

Man kann aber explizit nachrechnen, dass das Kurvenintegral nicht verschwindet.

5. *Exakte Differenzialgleichungen.* Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $2y(t)y'(t) + ty'(t) + y(t) = 0$ mit $y(1) = 1$. (3)

Lösung: Wir erinnern noch einmal kurz an das prinzipielle Vorgehen. Das Ziel ist es, die Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,y(t)) = \varphi_t(t,y(t)) + \varphi_y(t,y(t))y'(t) = 0$$

zu schreiben. Denn in diesem Fall löst y genau dann die DGL, wenn $\varphi(t,y(t)) = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, die durch den Anfangswert festgelegt wird. In unserem Fall haben wir also $\varphi_t(t,y) = y$ und $\varphi_y(t,y) = 2y + t$. Wie in der vorherigen Aufgabe folgt also $\varphi(t,y) = ty + f(y)$ und $\varphi_y(t,y) = t + f'(y) = 2y + t$. Somit gilt $f'(y) = 2y$. Wir haben also mit $\varphi(t,y) = ty + y^2$ eine Stammfunktion gefunden. Eine Lösung y der DGL erfüllt also

$$y^2(t) + ty(t) = c.$$

Setzen wir die Anfangswertbedingung $y(1) = 1$ ein, so erhalten wir $c = 2$. Also gilt

$$y^2(t) + ty(t) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{-t \pm \sqrt{t^2+8}}{2}$$

nach Auflösen der quadratischen Gleichung. Da wir die lokale Auflösung um den Punkt $(1,1)$ verwenden müssen, um das Anfgangswertproblem zu lösen, ist die eindeutige Lösung des Problems $y(t) = \frac{\sqrt{t^2+8}-t}{2}$.

(b) $\frac{ty'(t)}{1+(ty(t))^2} + \frac{y(t)}{1+(ty(t))^2} - 3e^t = 0$ mit $y(1) = 0$. (3)

Lösung: Wir gehen wie im vorherigen Aufgabenteil vor. Für eine mögliche Stammfunktion φ gilt dann $\varphi_y(t,y) = \frac{t}{1+(ty)^2}$ und $\varphi_t(t,y) = \frac{y}{1+(ty)^2} - 3e^t$. Aus der ersten Gleichung folgt $\varphi(t,y) = \arctan(ty) + f(t)$ für eine t-abhänigige Funktion f. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung sieht man, dass $f'(t) = -3e^t$ gilt, also ist $\varphi(t,y) = \arctan(ty) - 3e^t$ eine Stammfunktion. Eine Lösung y der Gleichung erfüllt somit

$$\arctan(ty(t)) - 3e^t = c,$$

wobei c durch die Anfgangswertbedingung $y(1) = 0$ zu $c = -3e$ bestimmt ist. Auflösen der Gleichung nach y ergibt

$$y(t) = \frac{1}{t}\tan(3e^t - 3e).$$

6. *Logistisches Wachstum.* Die Differenzialgleichung des logistischen Wachstums ist gegeben durch

$$y'(t) = cy(t)(M - y(t))$$

mit Konstanten $c, M \in \mathbb{R}$. Sie beschreibt im Modellfall $c > 0$ und $M > 0$ mit einem Anfwangswert $y_0 \in (0, M)$ das Wachstum einer Population, bei der die Population durch Umwelteinflüsse nach oben beschränkt ist. Dabei wird im Modell angenommen, dass das Populationswachstum proportional zum momentanen Bestand der Population (wie beim exponentiellen Wachstum) und zu der noch vorhandenen Kapazität des Lebensraums ist.

(a) Erläutere anhand der Gleichung in Worten, wie sich das Wachstum der Population im oberen Modellfall bei

- bei sehr kleinen (positiven) Populationsgrößen,
- bei $y(t) \approx M/2$,
- bei Populationsgrößen minimal geringer als M

verhalten sollte. Skizziere dann einen beispielhaften Verlauf einer Lösung der Differenzialgleichung für sehr kleine positive Anfangswerte. (2)

Lösung: Bei sehr kleinen Populationsgrößen und bei Populationsgrößen minimal geringer als M ist das Produkt auf der rechten Seite sehr klein und der Bestand nimmt nur minimal zu. Die Funktion $y \mapsto y(M - y)$ besitzt bei $y = M/2$ ein Maximum. Dort ist also die Zunahme maximal. Das Wachstum der Population nimmt also bis zur Populationsgröße $M/2$ zu, klingt dann stetig ab, bis es bei der Populationsgröße M völlig zum Erlischen kommt. Man erhält so also schon den qualitativen Verlauf der Lösung, die etwa in `http://de.wikipedia.org/wiki/Logistische_Funktion` skizziert wird.

(b) Bestimme die allgemeine Form der Lösung der Differenzialgleichung mit Anfangswert $y(0) = y_0$ für $y_0 \geq 0$. (3)

Lösung: Die logistische Differenzialgleichung ist eine Differenzialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Ist $y_0 = 0$ oder $y_0 = M$, so lösen die konstanten Funktionen $y(t) = 0$ oder $y(t) = M$ die Differenzialgleichung. Für andere Anfangswerte gilt lokal

$$\frac{y'(t)}{y(t)(M - y(t))} = c.$$

Wir müssen also eine Stammfunktion von $y \mapsto \frac{1}{y(M-y)}$ finden. Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch und erhalten $\frac{1}{y(M-y)} = \frac{1}{M}(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y})$. Eine Stammfunktion ist $y \mapsto \frac{1}{M}(\log y - \log(M - y))$. Durch Integration erhalten wir

$$\log y(t) - \log(M - y(t)) - \log y_0 + \log(M - y_0) = \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)(M - y(s))}\, ds = cMt.$$

Kompakter gilt

$$\log\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\frac{M-y_0}{y_0}\right) = cMt \quad \Leftrightarrow \frac{y(t)}{M-y(t)} = \frac{y_0}{M-y_0}\exp(cMt).$$

Um die Lösung zu bestimmen, müssen wir also noch die Gleichung $\frac{y}{M-y} = a$ nach y auflösen: $y = \frac{M}{1+1/a}$. Wir erhalten also die Lösung

$$y(t) = \frac{M}{1 + \frac{M-y_0}{y_0}\exp(-cMt)}.$$

(c) Zeigen Sie, dass im Modellfall für eine Lösung y der Differenzialgleichung $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existiert und bestimme den Grenzwert. Was bedeuet das anschaulich? (1)

Lösung: Mithilfe der expliziten Lösung sieht man sofort, dass $\lim_{t\to\infty} y(t)$ exisitert. Für $y_0 = 0$ ist der Grenzwert 0, ansonsten ist der Grenzwert M. Man sieht also, dass (bei vorhandener Anfangspopulation) die Population asymptotisch gegen die Maximalkapazität des Lebensraums wächst (falls $y_0 < M$), asymptotisch gegen die Maximalkapazität des Lebensraums fällt (falls $y_0 > M$) oder konstant der Maximalpopulation entspricht (falls $y_0 = M$).

(d) Zeige, dass im Modellfall die Lösung y für das Anfangswertproblem $y(0) = y_0$ mit $y_0 \in (0, M/2)$ einen eindeutigen Wendepunkt zu einer Zeit $t_0 > 0$ besitzt. Berechne die Größe der Population zum Zeitpunkt t_0. (2)

Lösung: Eine notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist $y''(t) = 0$. Wir berechnen also die ersten zwei Ableitungen von y.

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\frac{M}{\left(1+\frac{M-y_0}{y_0}\exp(-cMt)\right)^2}\cdot\frac{M-y_0}{y_0}\exp(-cMt)\cdot(-cM) \\ &= \frac{cM^2(M-y_0)}{y_0}\frac{\exp(-cMt)}{\left(1+\frac{M-y_0}{y_0}\exp(-cMt)\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(t) = \frac{cM^2(M-y_0)}{y_0}&\left(-cM\cdot\frac{\exp(-cMt)}{\left(1+\frac{M-y_0}{y_0}\exp(-cMt)\right)^2}\right. \\ &\left.-2\exp(-cMt)\frac{1}{\left(1+\frac{M-y_0}{y_0}\exp(-cMt)\right)^3}\cdot\frac{M-y_0}{y_0}(-cM)\exp(-cMt)\right) \\ &= \frac{cM^2(M-y_0)}{y_0}\cdot\frac{\exp(-cMt)}{\left(1+\frac{M-y_0}{y_0}\exp(-cMt)\right)^2} \\ &\cdot\left(-cM+\frac{2cM(M-y_0)}{y_0}\frac{\exp(-cMt)}{1+\frac{M-y_0}{y_0}\exp(-cMt)}\right) \end{aligned}$$

Man sieht also, dass $y''(t)$ genau dann verschwindet, wenn der Ausdruck in der großen Klammer verschwindet. Man rechnet nach, dass dies für $t_0 = -\log(\frac{y_0}{M-y_0})/cM$ gilt. Man hat nun $t_0 > 0$ genau dann, wenn $y_0 < M/2$ ist. Eingesetzt in die Funktion ergibt sich

$$y(t) = \frac{M}{1+\frac{M-y_0}{y_0}\exp(\log(y_0/M-y_0))} = \frac{M}{2}.$$

Man kann sich nun überlegen, dass y einen Wendepunkt besitzen muss. Eine Möglichkeit wäre etwa folgende: da $\lim_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$ gilt, ist y' auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt und besitzt damit ein globales Maximum. Da y' reell analytisch ist (d.h. lokal um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar), muss ein solches Maximum bereits ein Wendepunkt sein, da dann notwendigerweise y'' das Vorzeichen an der Maximalstelle wechseln muss. Da y einen Wendepunkt besitzt und t_0 der einzige Kanditat ist, ist t_0 damit der eindeutige Wendepunkt der Lösung.

Alternativ kann man die Differenzialgleichung benützen um zu sehen, dass y' an der Stelle t_0 ein Maximum besitzt und dass wegen der stikten Monotonie der Lösung y' für $t < t_0$ wächst und y' für $t > t_0$ fällt und damit t_0 ein Wendepunkt der Lösung ist.

Wir werden in der Vorlesung sehen, dass sich die meisten Eigenschaften der Lösung auch direkt aus der Differenzialgleichung mit Hilfe der allgemeinen Theorie herleiten lassen, ohne die Lösung zu kennen. Im Gegensatz zu dieser Aufgabe sind dann nicht längere, umständliche Rechnungen nötig, um die Eigenschaften nachzuweisen. Es lohnt sich also, die Theorie zu beherrschen!