Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 16.5.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 30

Lösungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 3

Am 9. Mai entfallen die Übungen wegen Christi Himmelfahrt. Dieses Blatt ist deshalb für zwei Wochen Bearbeitungszeit gedacht und somit umfangreicher.

7. *Potenzreihenansatz.* Auch wenn es öfters nicht möglich ist, die Lösung einer Differenzialgleichung in einer geschlossenen Form darzustellen, kann ein sogenannter Potenzreihenansatz noch zu einer relativ expliziten Darstellung der Lösung führen. Wir wollen diese Technik an einem Beispiel kennenlernen. Wir betrachten dazu das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''(t) &= y(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Zeige ohne explizit die Lösung zu bestimmen, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt. (2)

Lösung: Die Differenzialgleichung ist von der Form $u''(t) + pu'(t) + q(t)u(t) = 0$ mit $p(t) = 0$ und $q(t) = 1$. Die Behauptung folgt dann direkt aus Satz 10.1.

Man kann das folgendermaßen aus dem Satz für Systeme 1. Ordnung herleiten (dies wurde in der Vorlesung gemacht und wird hier noch einmal wiederholt): Wir schreiben die Differenzialgleichung wie in der Vorlesung in ein System erster Ordnung um. Sei dazu $x_1(t) = y(t)$ und $x_2(t) = y'(t)$. Dann ist die obige Differenzialgleichung äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t). \end{aligned}$$

Dieses System erfüllt aber das Kriterium (6.4) für globale Lösungen aus der Vorlesung.

(b) Zeige ohne die Lösung des Anfangswertproblems zu bestimmen, dass die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Problems streng monoton wachsend und konvex auf $[0, \infty)$ ist und einen Wendepunkt in der Null besitzt. (3)

Lösung: Die globale Lösung des Problems $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich zweimal stetig differenzierbar. Aufgrund der Anfangswerte ist y zumindest in einer kleinen Umgebung $(-\delta, \delta)$ $(\delta > 0)$ der Null streng monoton wachsend und somit $y(t) > 0$ für alle $t \in (0, \delta)$, $y(t) < 0$ für alle $t \in (-\delta, 0)$ und wegen dem Anfangswert $y(0) = 0$. Wegen der Differenzialgleichung gilt dasselbe nun auch für $y''(t)$. Dies ist aber hinreichend für einen Wendepunkt in der Null. Alternativ sieht man, dass $y''(0) = 0$ und nach Differenzieren der Differenzialgleichung $y'''(0) = 1$ gilt (hier muss man aber zuerst zeigen, dass die dritte Ableitung der Lösung existiert). Dies ist ebenfalls hinreichend für einen Wendepunkt.

Wähle nun $b \coloneqq \sup\{c : y'(t) > 0 \text{ für alle } t \in (0, c)\}$. Beachte, dass aufgrund der obigen Diskussion die Menge über die das Supremum gebildet wird nicht leer ist und $b \geq \delta$ gilt. Wir zeigen nun, dass $b = \infty$ gilt. Nehmen wir dazu an, dass b endlich wäre. Aus Stetigkeitsgründen folgt dann $y'(b) = 0$. Die Lösung y ist auf $(0, b)$ streng monoton wachsend und $y(t) > 0$ auf $(0, b)$. Dasselbe gilt wegen der Differenzialgleichung aber auch für y''. Somit ist insbesondere $y'(b) \geq y'(0) = 1$. Dies ist ein Widerspruch zu $y'(b) = 0$. Wir haben also gezeigt, dass y streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$ ist. Insbesondere ist $y''(t) = y(t) > 0$ für $t > 0$. Somit ist y konvex auf $[0, \infty)$.

(c) Löse das Anfangswertproblem mit dem Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. (2)

Lösung: Einsetzen des Ansatzes ergibt $\lambda^2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t}$. Nach Kürzen erhält man so die Gleichung $\lambda^2 = 1$. Tatsächlich sind $e^{\pm t}$ zwei spezielle Lösungen der Differenzialgleichungen. Aufgrund der Linearität der Gleichung sind somit $y(t) = Ae^t + Be^{-t}$ Lösungen der Differenzialgleichung. Einsetzen der Anfangswerte ergibt $A = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$. Somit ist $y(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t$ die Lösung des Anfangwertproblems.
Hinweis: Durch Einsetzen des Ansatzes in die DGL erhältst Du eine Gleichung für λ. Die Lösungen der Gleichung liefern Dir spezielle Lösungen für die Differenzialgleichung. Bestimme nun eine Linearkombination der speziellen Lösungen, die das Anfangswertproblem löst.

(d) Wir nehmen nun an, dass sich die maximale Lösung y lokal um die Anfangszeit $t_0 = 0$ in eine Potzenreihe $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ entwickeln lässt. Zeige, dass die Koeffizienten dann für $k \geq 2$ die rekursive Gleichung $c_k = \frac{c_{k-2}}{k(k-1)}$ erfüllen. (3)

Lösung: Einsetzen der Potenzreihe in die Differenzialgleichung ergibt

$$y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)t^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)t^k = y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Da zwei Potenzreihen aber genau dann übereinstimmen, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen, erhalten wir so die Gleichung $c_k = c_{k+2}(k+2)(k+1)$. Nach Umformen und Indextausch folgt so für $k \geq 2$ die rekursive Gleichung $c_k = \frac{c_{k-2}}{k(k-1)}$.
Bemerkung: Nach dem Satz von Cauchy–Kowalevski besitzt eine Gleichung $y'(t) = f(y(t))$ für Funktionen f, die lokal um den Anfangswert in eine Potenzreihe entwickelbar sind, auch lokal eine Lösung, die in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Dies liefert eine theoretische Rechtfertigung für den oberen Ansatz (wenn man die Gleichung in ein System erster Ordnung umschreibt).

(e) Bestimme eine explizite Formel für c_k und stelle die Potenzreihe auf. Zeige, dass man wieder das Ergebnis aus Teil (c) erhält. (2)

Lösung: Aus den Anfangswerten liest man $c_0 = 0$ und $c_1 = 1$ ab. Nun sieht man sofort induktiv, dass $c_k = 0$, falls k gerade. Für k ungerade zeigen wir per vollständiger Induktion, dass $c_k = \frac{1}{k!}$. Der Induktionsanfang ist gerade $c_1 = 1$. Nehmen wir nun an, es gelte $c_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)!}$. Dann gilt

$$c_{2k+1} = \frac{c_{2k-1}}{(2k+1)2k} = \frac{1}{(2k-1)!(2k+1)2k} = \frac{1}{(2k+1)!}.$$

Somit ist die Potenzreihenentwicklung der Lösung $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh t$.

8. *Hamiltonsche Systeme.* Es sei $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir versehen $\mathbb{R}^{2n}$ mit den Koordinaten $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. In der Physik interessiert man sich dann für die sogenannten *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\frac{d}{dt} q_k(t) = \frac{\partial}{\partial p_k} H(p_1(t), \dots, q_n(t)) \qquad (k = 1, \dots, n)$$
$$\frac{d}{dt} p_k(t) = -\frac{\partial}{\partial q_k} H(p_1(t), \dots, q_n(t)) \qquad (k = 1, \dots, n)$$

(a) Zeige, dass die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu jedem Anfangswertproblem $(p_1(0), \dots, q_n(0)) = (p_1^0, \dots, q_n^0) \in \mathbb{R}^{2n}$ eine lokale eindeutige maximale Lösung $(p, q) : I \to \mathbb{R}^{2n}$ ($I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall) besitzen. (1)

Lösung: Bezüglich $x = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ lässt sich die Differenzialgleichung als $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))$ schreiben, wobei $f(x) = (-\frac{\partial H}{\partial p_1}(x), \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n}(x))$ bzgl. der Trennung in p- und q-Koordinaten. Offensichtlich erfüllt f die Voraussetzungen des Satzes 6.1 ($f \in C^1(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^{2n})$) aus der Vorlesung, der die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ zeigt.

(b) Zeige, dass entlang einer Lösung aus Teil (a) der Wert der Hamiltonfunktion konstant bleibt, d.h. (2)

$$H(p_1(t), \dots, q_n(t)) = H(p_1(0), \dots, q_n(0)) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Lösung: Die Komponenten der Lösung sind einmal stetig differenzierbar, also erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(p_1(t), \dots, q_n(t)) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_k} H(p_1(t), \dots, q_n(t)) \cdot \frac{d}{dt} p_k(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} H(p_1(t), \dots, q_n(t)) \cdot \frac{d}{dt} q_k(t) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_k} H(p_1(t), \dots, q_n(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} H(p_1(t), \dots, q_n(t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} H(p_1(t), \dots, q_n(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial p_k} H(p_1(t), \dots, q_n(t)) = 0.\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion konstant und es folgt die Behauptung.

(c) Nehmen wir nun zusätzlich an, dass $H^{-1}([-M, M])$ für alle $M \geq 0$ beschränkt ist. Zeige, dass dann $I = \mathbb{R}$ gilt, man also globale Lösungen hat. (2)

Lösung: Aus der Stetigkeit von H folgt, dass $H^{-1}([-M, M])$ für alle $M \geq 0$ abgeschlossen ist. Zusammen mit der Voraussetzung ist also $H^{-1}([-M, M])$ kompakt. Wir wählen nun $M := |H|(p_1^0, \dots, q_n^0)$. Für $T > 0$ ist somit auch die Menge $[-T, T] \times H^{-1}([-M, M])$ kompakt. Da die Hamiltonfunktion nach der letzten Aufgabe konstant entlang von Lösungen ist und die maximale Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichung nach Satz 7.3 in keinem Kompaktum, also auch nicht in $[-T, T] \times H^{-1}[-M, M]$ bleibt, ist $I \supset [-T, T]$. Da $T > 0$ beliebig ist, besitzt die Gleichung eine globale Lösung.

(d) Wir betrachten nun ein Beispiel. Für $n = 1$ betrachten wir die (normalisierte) Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Bestimme die allgemeine Gestalt der Lösungen der dazugehörigen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. (3)

Lösung: Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (wir verwenden nun Punkte für die Zeitableitung) ergibt

$$\dot{q}(t) = p(t) \qquad \dot{p}(t) = -q(t).$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt $\ddot{q}(t) + q(t) = 0$. Mit dem Ansatz $q(t) = e^{\lambda t}$ sieht man, dass $\lambda = \pm i$ gelten muss. Dementsprechend sind

$$\begin{aligned} q(t) &= A \sin t + B \cos t \\ p(t) &= A \cos t - B \sin t \end{aligned}$$

für $A, B \in \mathbb{R}$ Lösungen des Systems. Setzt man nun $B = q_0$ und $A = p_0$, so hat man die eindeutige Lösung zu dem Anfangswertswertproblem $(p(0), q(0)) = (p_0, q_0)$ gefunden.

9. *Grenzgeschwindigkeit eines Autos.* Bei schnell fahrenden Fahrzeugen kann davon ausgegangen werden, dass der Beschleunigung der Luftwiderstand als Kraft $F = -rv^2$ mit einer Konstanten $r > 0$ entgegenwirkt (dabei hängt die Konstante r etwa von dem c_W-Wert des Fahrzeuges ab), wobei v die Geschwindigkeit des Fahrzeuges ist. Wir nehmen zusätzlich an, dass das Fahrzeug eine konstante Antriebskraft $K > 0$ besitzt.

(a) Zeige, dass für die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Fahrzeuges mit der Masse $m > 0$ folgende Differenzialgleichung gilt: (1)

$$\dot{v}(t) = -\frac{r}{m}\left(\sqrt{\frac{K}{r}} - v(t)\right)\left(-\sqrt{\frac{K}{r}} - v(t)\right)$$

Hinweis: Verwende die Newtonschen Gleichungen aus der Physik!

Lösung: Nach den Newtonschen Gleichungen gilt $m\ddot{x} = K - r\dot{x}^2$. Für $v = \dot{x}$ gilt somit (ohne die Argumente der Funktionen)

$$\dot{v} = \frac{1}{m}(K - rv^2) = \frac{r}{m}\left(\sqrt{\frac{K}{r}} - v\right)\left(\sqrt{\frac{K}{r}} + v\right) = -\frac{r}{m}\left(\sqrt{\frac{K}{r}} - v\right)\left(-\sqrt{\frac{K}{r}} - v\right)$$

(b) Zeige ohne die Differenzialgleichung zu lösen, dass unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ das Anfangswertproblem eine eindeutige globale Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt und dass die Geschwindigkeit für $t \to \infty$ gegen $\sqrt{\frac{K}{r}}$ konvergiert. Eine Vervierfachung der Antriebskraft führt also nur zu einer Verdopplung der Maximalgeschwindigkeit. (5)

Lösung: Mithilfe der Transformation $u(t) = \sqrt{\frac{K}{r}} - v(t)$ lässt sich die Differenzialgleichung in eine Gleichung von der Form einer logistischen Gleichung umschreiben. Die Behauptungen folgen dann nach einer Rücktransformation direkt aus den Ergebnissen der Vorlesung. Wir geben im folgenden die Argumente noch einmal explizit an.

Wir stellen fest, dass die Differenzialgleichung die Voraussetzungen von Satz 7.1 aus der Vorlesung erfüllt. Somit existiert zu jedem Anfangswert eine eindeutige maximale Lösung. Offensichtlich lösen die konstanten Funktionen $v(t) = \pm\sqrt{\frac{K}{r}}$ die Differenzialgleichung zu den entsprechenden Anfangswerten. Wir zeigen nun, dass die maximale Lösung zu dem Anfangswert $y(0) = 0$ im gesamten Definitionsbereich im Intervall $I_0 = (-\sqrt{\frac{K}{r}}, \sqrt{\frac{K}{r}})$ liegt. Wäre dies nicht der Fall, so müsste nach dem Zwischenwertsatz für ein t_0 der Wert $y(t_0)$ auf dem Rand von I_0 liegen. Da die Gleichung autonom ist, würde aus der Eindeutigkeit der Lösung aber schon folgen, dass die Lösung für alle Zeiten auf dem Rand liegt. Dies widerspricht aber der Wahl des Anfangswertes. Aus dem Kriterium für Maximalität (Korollar 7.4) aus der Vorlesung folgt nun, dass die Lösung global ist. Man sieht aus der Faktorisierung der rechten Seite der Differenzialgleichung, dass für t mit $v(t) \in (-\sqrt{\frac{K}{r}}, \sqrt{\frac{K}{r}})$ auch $\dot{v}(t) > 0$ gilt. Somit ist die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Da $v(t)$ streng monoton wachsend und beschränkt ist, existiert $\lim_{t\to\infty} v(t) =: v_\infty$. Aus dem bisher gezeigten folgt zudem $v_\infty \in (0, \sqrt{\frac{K}{r}}]$. Wäre nun $v_\infty < \frac{K}{r}$, so wäre wegen $v(t) \in [0, v_\infty]$ für alle $t \geq 0$

$$\dot{v}(t) = \frac{r}{m}\left(\sqrt{\frac{K}{r}} - v(t)\right)\left(-\sqrt{\frac{K}{r}} - v(t)\right) \geq \epsilon$$

für alle $t \geq 0$ und ein $\epsilon > 0$. Dann wäre aber $v(t) = \int_0^t \frac{d}{ds}\dot{v}(s)\,ds \geq \epsilon t$, was der Beschränktheit der Lösung widerspricht. Also gilt $\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{K}{r}}$.

Hinweis: Orientiere Dich an dem Vorgehen für die logistische Gleichung aus der Vorlesung!

(c) Gebe eine explizite Lösung der Differenzialgleichung unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ an und bestätige damit den Wert der Maximalgeschwindigkeit aus dem vorherigen Teil. (4)

Lösung: Um die Größe der Termine zu reduzieren, lösen wir die Differenzialgleichung $\dot{v} = c(a-v)(a+v)$ für zwei positive Konstanten c and a mit dem Anfangswert $v(0) = 0$. Trennen der Veränderlichen führt zu $\frac{\dot{v}}{(a-v)(a+v)} = c$. Wegen der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-v} + \frac{1}{a+v}\right) = \frac{1}{(a-v)(a+v)}$$

gilt unter Ausnutzung des Anfangwertes

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a}\log\left(\frac{a+v(t)}{a-v(t)}\right) &= \int_0^t \frac{d}{ds}\frac{1}{2a}\log\left(\frac{a+v(s)}{a-v(s)}\right) ds = \int_0^t \frac{\dot{v}(s)}{(a-v(s))(a+v(s))} ds \\ &= \int_0^t c\, ds = ct\end{aligned}$$

Löst man die Gleichung $\frac{a+v(t)}{a-v(t)} = \exp(2act)$ nach $v(t)$ auf, so erhält man

$$v(t) = a \cdot \frac{\exp(2act) - 1}{\exp(2act) + 1} = a \cdot \frac{\frac{1}{2}(\exp(act) - \exp(-act)}{\frac{1}{2}(\exp(act) + \exp(-act)} = a \tanh(act).$$

Setzen wir für unsere Gleichung die entsprechenden Werte von a und c ein, so erhalten wir

$$v(t) = \sqrt{\frac{K}{r}} \tanh\left(\frac{\sqrt{rK}}{m} t\right).$$

Man sieht nun sofort, dass wie bereits abstrakt gesehen $\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{K}{r}}$ gilt.