Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 23.5.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 20

Übungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 4

10. *Systeme von Differenzialgleichungen.* Bestimme die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems (5)

$$y_1'(t) = -y_2(t)$$
$$y_2'(t) = y_1(t) + t.$$

Hinweis: Variation der Konstanten!

11. *Fundamentalsystem.* Bestimme, falls möglich, eine lineare Differenzialgleichung höherer Ordnung mit reellen Koeffizienten und ein Fundamentalsystem dieser Gleichung, dass die Funktionen $y_1(t) = \sin(2t)$ und $y_2(t) = \cos(3t)$ enthält. (3)

12. *Linear gedämpfter harmonsicher Oszillator.* Die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

beschreibt für $\omega_0 > 0$ die Schwingung eines physikalischen Systems (etwa eines Federpendels) unter Einfluss einer linearen Dämpfung mit Reibungsterm $\gamma \geq 0$. Bestimme zwei linear unabhängige reelle Lösungen der Gleichung.

Hinweis: Hierfür ist eine Fallunterscheidung notwendig. (5)

13. *Produktregel.* Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktionen. Zeige, dass dann $t \mapsto A(t)v(t)$ auf I differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{dt}A(t)v(t) = A'(t)v(t) + A(t)v'(t),$$

wobei die Ableitungen jeweils komponentenweise zu verstehen sind. (4)

14. *Konvergenz von Lösungen.* Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ betrachten wir die Differenzialgleichung

$$y'(t) = f(y(t)).$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine globale Lösung der Differenzialgleichung ist und $c := \lim_{t\to\infty} y(t)$ existiert. Zeige, dass dann $f(c) = 0$ gilt. (3)