Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler

Abgabe: Donnerstag, 23.5.2013

Sommersemester 2013
Punktzahl: 20

Lösungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 4

10. *Systeme von Differenzialgleichungen.* Bestimme die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems (5)

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + t. \end{aligned}$$

Lösung: Da die Gleichung linear ist, besteht die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems aus der Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung mit einer partikulären Lösung. Es wurde bereits in der Vorlesung gezeigt, dass

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung bildet. Wir müssen also nur noch eine partikuläre Lösung bestimmen. Diese erhalten wir über einen Variation der Konstanten Ansatz. Die Formel hierfür steht im Skript unter (11.4), da wir uns diese aber nicht merken können, leiten wir sie noch einmal schnell her. Nehmen wir an, dass für eine stetig differenzierbare Funktion $v : I \to \mathbb{R}^2$ die Funktion $y(t) = U(t)v(t)$ das inhomogene Problem $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ löst. Dann gilt

$$AU(t)v(t) + b(t) = Ay(t) + b(t) = y'(t) = U'(t)v(t) + U(t)v'(t) = AU(t)v(t) + U(t)v'(t).$$

Auflösen der Gleichung nach $v'(t)$ ergibt $v'(t) = U(t)^{-1}b(t)$. Durch Integration erhalten wir also ein geeignetes v. In unserem Fall ist $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ und $U(t) = U^T(t) = U^{-1}(t)$, da $U(t)$ orthogonal ist. Also erhalten wir

$$v(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ \sin s & -\cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} s \sin s \\ -s \cos s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -t \cos t + \sin t \\ -t \sin t - \cos t + 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $y(t) = U(t)v(t) = \begin{pmatrix} \sin t - t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$ eine partikuläre Lösung der Gleichung. Die allgemeine Lösung des Systems ist dann

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} \sin t - t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^2.$$

Hinweis: Variation der Konstanten!

11. *Fundamentalsystem.* Bestimme, falls möglich, eine lineare Differenzialgleichung höherer Ordnung mit reellen Koeffizienten und ein Fundamentalsystem dieser Gleichung, dass die Funktionen $y_1(t) = \sin(2t)$ und $y_2(t) = \cos(3t)$ enthält. (3)

Lösung: Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann man wie bereits gesehen durch den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ lösen. Man erhält dann eine polynomielle Gleichung, deren Nullstellen man bestimmen muss. Wegen $\cos 3t = \frac{1}{2}(e^{3it} + e^{-3it})$ und analog für $\sin(2t)$ benötigen wir also die Nullstellen $\pm 2i$ und $\pm 3i$. Ein Polynom mit diesen Nullstellen ist etwa $(x-3i)(x+3i)(x-2i)(x+2i) = (x^2+9)(x^2+4) = x^4+13x^2+36$. Also besitzt die Gleichung

$$y^{(4)}(t) + 13y''(t) + 36y(t) = 0$$

ein Fundamentalsystem bestehend aus $\sin(2t)$, $\cos(2t)$, $\sin(3t)$ und $\cos(3t)$, nachdem man sich überzeugt hat, dass die Lösungen linear unabhängig sind.

12. *Linear gedämpfter harmonsicher Oszillator.* Die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

beschreibt für $\omega_0 > 0$ die Schwingung eines physikalischen Systems (etwa eines Federpendels) unter Einfluss einer linearen Dämpfung mit Reibungsterm $\gamma \geq 0$. Bestimme zwei linear unabhängige reelle Lösungen der Gleichung.

Hinweis: Hierfür ist eine Fallunterscheidung notwendig. (5)

Lösung: Aus der Vorlesung weiß man, dass man die Lösungen über die Nullstellen des sogenannten charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2$ bestimmen kann. Man erhält etwa mit der Miternachtsformel für die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Ist $\gamma > \omega_0$ (große Reibung), so sind nach der Vorlesung

$$y_1(t) = e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}, \qquad y_2(t) = e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}$$

zwei linear unabhängige reelle Lösungen der Gleichung. Im Fall $\gamma = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall) sind nach der Vorlesung

$$y_1(t) = e^{-\gamma t}, \quad y_2(t) = te^{-\gamma t}$$

zwei linear unabhängige reelle Lösungen. Im Fall $\gamma < \omega_0$ (geringe Reibung) gilt $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und man erhält nach der Vorlesung durch Betrachten des Real- und Imaginärteils einer komplexen Lösung der Gleichung die zwei linear unabhängigen reellen Lösungen

$$y_1(t) = e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t\right), \qquad y_2(t) = e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t\right).$$

13. *Produktregel.* Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktionen. Zeige, dass dann $t \mapsto A(t)v(t)$ auf I differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{dt}A(t)v(t) = A'(t)v(t) + A(t)v'(t),$$

wobei die Ableitungen jeweils komponentenweise zu verstehen sind. (4)

Lösung: Sei $t_0 \in I$. Nach der Definition von Differenzierbarkeit im Punkt t_0 ist zu zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|A(t_0+h)v(t_0+h) - A(t_0)v(t_0) - A'(t_0)v(t_0)h - A(t_0)v'(t_0)h\|_2}{|h|} = 0.$$

Insbesondere ist zu zeigen, dass der Grenzwert überhaupt existiert! Hierbei spielt die Wahl einer Norm eigentlich keine Rolle, da alle Normen auf reellen endlich dimensionalen normierten Vektorräumen äquivalent sind. Um so konkret wie möglich zu bleiben, verwenden wir die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und die aus der Vorlesung bekannte Hilbert-Schmidt Norm

/ euklidische Norm auf dem Vektorraum der $\mathbb{R}^{n\times n}$-Matrizen. Da $t \mapsto A(t)$ und $t \mapsto v(t)$ differenzierbar sind, gilt

$$A(t_0 + h) = A(t_0) + A'(t_0)h + R_1(h)$$

mit $\lim_{h\to 0} \|R_1(h)/h\| = 0$ in der Hilbert-Schmidt Norm und

$$v(t_0 + h) = v(t_0) + v'(t_0)h + R_2(h)$$

mit $\lim_{h\to 0} \|R_2(h)/h\|_2 = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} A(t_0 + h)v(t_0 + h) &= A(t_0 + h)(v(t_0) + v'(t_0)h + R_2(h)) \\ &= (A(t_0) + A'(t_0)h + R_1(h))(v(t_0) + v'(t_0)h + R_2(h)) \\ &= A(t_0)v(t_0) + (A'(t_0)v(t_0) + A(t_0)v'(t_0))h + R(h), \end{aligned}$$

wobei $R(h) = R_1(h)(v(t_0) + v'(t_0)h + R_2(h)) + A(t_0)R_2(h) + A'(t_0)v'(t_0)h^2 + A'(t_0)hR_2(h)$. Benützen wir die Ungleichung $\|Ax\|_2 \leq \|A\|\,\|x\|_2$ aus der Vorlesung, so sieht man leicht, dass alle Summanden von $R(h)/h$ in der euklidischen Norm gegen Null konvergieren. So gilt etwa

$$\begin{aligned} &\limsup_{h\to 0} \frac{\|R_1(h)(v(t_0) + v'(t_0)h + R_2(h)\|_2}{|h|} \\ &\qquad \leq \limsup_{h\to 0} \frac{\|R_1(h)\|}{|h|} \cdot \limsup_{h\to 0} \left\|v(t_0) + v'(t_0)h + R_2(h)\right\|_2 = 0 \cdot \|v(t_0)\|_2 = 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|A(t_0 + h)v(t_0 + h) - A(t_0)v(t_0) - A'(t_0)v(t_0)h - A(t_0)v'(t_0)h\|_2}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|R(h)\|_2}{|h|} = 0$$

und damit die Behauptung.

14. *Konvergenz von Lösungen.* Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ betrachten wir die Differenzialgleichung

$$y'(t) = f(y(t)).$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine globale Lösung der Differenzialgleichung ist und $c \coloneqq \lim_{t\to\infty} y(t)$ existiert. Zeige, dass dann $f(c) = 0$ gilt. (3)

Lösung: Aus der Stetigkeit von f folgt, dass

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} f(y(t)) = f\left(\lim_{t\to\infty} y(t)\right) = f(c).$$

Wäre nun $f(c) \neq 0$, so gebe es ein $\epsilon > 0$ und ein $t_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $|y'(t)| \geq \epsilon$ für alle $t \geq t_0$. Nach dem Hauptsatz wäre aber dann (y' ist stetig und kann damit das Vorzeichen nicht wechseln) für $t > t_0$

$$|y(t)| = \left|y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds\right| \geq \left|\int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds\right| - |y(t_0)| \geq \epsilon(t - t_0) - |y(t_0)| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty.$$

Dies widerspricht aber der Konvergenz von $y(t)$ für $t \to \infty$. Also gilt $f(c) = 0$.