



Übungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 5

Die Besprechung dieses Übungsblattes findet wegen Fronleichnam anstatt der Vorlesung am Mittwoch, den 29. Mai, statt. Die ersten beiden Aufgaben sind Bonusaufgaben und dienen gleichzeitig als Wiederholung für die Klausur. Für die Zulassungsvoraussetzung werden 50% aller regulären Übungspunkte, d.h. 55 Punkte, benötigt.

15. Bestimme eine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und das maximale Existenzintervall dieser Lösung (hierfür muss keine Begründung gegeben werden). Zeige oder widerlege jeweils die Eindeutigkeit dieser Lösung.

(a) $y''(t) = \frac{1}{t}y'(t)$ mit $y(1) = 2$ und $y'(1) = 1$. (4)

(b) $2y(t)y'(t) - 2t^2y'(t) - 4ty(t) - 2t = 0$ mit $y(0) = 0$. (4)

(c) $y'''(t) = y'(t) + 1$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = y''(0) = 0$. (4)

16. Wir betrachten für $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{t^2}{1+\exp(y^{20}(t))} \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

- (a) Zeige, dass für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem eine eindeutige globale Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt. (4)

- (b) Begründe in Abhängigkeit von dem Anfangswert y_0 in welchem Sinne $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t)$ existiert (eigentlich, uneigentlich, gar nicht). (4)

17. *Matrixexponentialfunktion.* Bestimme e^A für $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (5)

18. *Systeme mit konstanten Koeffizienten.* Bestimme jeweils ein reelles Fundamentalsystem.

- (a) (5)

$$y_1'(t) = y_1(t)$$

$$y_2'(t) = y_3(t)$$

- (b) $y_3'(t) = y_2(t)$. (5)

$$y_1'(t) = 5y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_2'(t) = y_1(t) + 5y_2(t)$$

19. *Picard-Iteration.* Bestimme mit Hilfe der Picard-Iteration die Lösung des AWP (5)

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t) + 1 \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$