Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 29.5.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 20+20

Lösungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 5

Die Besprechung dieses Übungsblattes findet wegen Fronleichnam anstatt der Vorlesung am Mittwoch, den 29. Mai, statt. Die ersten beiden Aufgaben sind Bonusaufgaben und dienen gleichzeitig als Wiederholung für die Klausur. Für die Zulassungsvoraussetzung werden 50% aller regulären Übungspunkte, d.h. 55 Punkte, benötigt.

15. Bestimme eine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und das maximale Existenzintervall dieser Lösung (hierfür muss keine Begründung gegeben werden). Zeige oder widerlege jeweils die Eindeutigkeit dieser Lösung.

(a) $y''(t) = \frac{1}{t}y'(t)$ mit $y(1) = 2$ und $y'(1) = 1$. (+4)

Lösung: Für eine Lösung y gilt zumindest lokal um den Anfangswert ($y'(1) \neq 0$) nach Trennen der Veränderlichen

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \log y'(t) = \int_1^t \frac{1}{s}\, ds = \log t \Rightarrow y'(t) = t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Der Anfangswert $y(1) = 2$ impliziert nun aber $c = \frac{3}{2}$. Ist y also eine Lösung des AWPs, so gilt notwendigerweise $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}$. Beachte, dass die Lösung des Problems bis auf eine Konstante durch die Lösung des Problems $z'(t) = \frac{1}{t}z(t)$ mit $z(1) = 1$ bestimmt ist. Die Funktion $f(t,z) = \frac{z}{t}$ erfüllt aber auf Intervallen der Form $[\epsilon, \infty]$ eine globale Lipschitz-Bedingung in der zweiten Variablen, also existiert die Lösung wegen $\epsilon > 0$ auf $(0, \infty)$ und ist dort eindeutig. Dann muss aber $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}$ tatsächlich eine Lösung sein (einen anderen Kandidaten haben wir ja nicht!). Tatsächlich ist $(0, \infty)$ auch der maximale Definitionsbereich der Lösung, da $(0, z(0)) = (0, y'(0)) = (0, 0)$ nicht im Definitionsbereich von f liegt!

(b) $2y(t)y'(t) - 2t^2y'(t) - 4ty(t) - 2t = 0$ mit $y(0) = 0$. (+4)

Lösung: Die Gleichung ist von der Form $p(t, y(t))y'(t) + q(t, y(t)) = 0$ mit $p(t, y) = 2y - 2t^2$ und $q(t, y) = -4ty - 2t$. Unsere Vermutung ist, dass es sich hierbei um eine exakte Differenzialgleichung handelt. Wir müssen also eine Funktion $F(t, y)$ mit $\nabla F(t, y) = (q(t, y), p(t, y))$ finden. Man hätte in diesem Fall

$$F_t(t, y) = q(t, y) = -4ty - 2t.$$

Also ist $F(t, y) = -2t^2y - t^2 + g(y)$ mit einer y-abhängigen Funktion g. Zudem müsste

$$-2t^2 + g'(y) = F_y(t, y) = p(t, y) = 2y - 2t^2$$

gelten. Also hätte man $g'(y) = 2y$ und damit zum Beispiel $g(y) = y^2$. Die Gültigkeit der Differenzialgleichung ist also äquivalent dazu, dass

$$F(t, y(t)) = y^2(t) - 2t^2y(t) - t^2 = c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ ist. Aus der Anfangsbedingung folgt dann notwendigerweise $c = 0$. Man hat also

$$y^2(t) - 2t^2y(t) - t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{2t^2 \pm \sqrt{4t^4 + 4t^2}}{2} = t^2 \pm |t| \sqrt{t^2 + 1}.$$

Es gilt unabhängig vom Vorzeichen $y(0) = 0$. Leider können wir nicht den Existenz- und Eindeutigkeitssatz verwenden, um zu zeigen, dass unsere Kandidaten tatsächlich Lösungen sind. Durch direktes Nachrechnen stellt man jedoch fest, dass für $t > 0$ und $t < 0$ (die Rechnungen sind in beiden Fällen identisch) die beiden Funktionen $t \mapsto t^2 \pm t\sqrt{t^2+1}$ die Differenzialgleichung lösen. In $t = 0$ muss man sich zuallererst Gedanken über die Differenzierbarkeit machen. So ist

$$\frac{y(h) - y(0)}{h} = \frac{h^2 \pm |h|\sqrt{h^2+1}}{h} = h \pm \operatorname{sgn} h \sqrt{h^2+1}.$$

Hat h ein konstantes Vorzeichen, so konvergiert also der einseitige Differenzenquotient gegen 1 oder -1. Da wir die Freiheit haben, rechts und links von der Null unterschiedliche Vorzeichen zu wählen, erhalten wir so zwei globale (stetig differenzierbare) Lösungen $y_1(t) = t^2 + t\sqrt{t^2+1}$ und $y_2(t) = t^2 - t\sqrt{t^2-1}$. Das einzige, was man sich hier noch schnell klar machen muss, ist, dass die beiden Funktionen die Differenzialgleichung auch für $t = 0$ erfüllen.

(c) $y'''(t) = y'(t) + 1$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = y''(0) = 0$. (+4)

Lösung: Nach Umschreiben in ein äquivalentes System erster Ordnung haben wir ein Differenzialgleichungssystem mit konstanten Koeffizieten (mit einer Inhomogenität). Nach der Vorlesung existiert für dieses System eine eindeutige globale Lösung. Also besitzt die Differenzialgleichung auch eine eindeutige globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir bestimmen zuerst ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Mit dem üblichen Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ erhalten wir nach Kürzen $\lambda^3 - \lambda = 0$. Also löst $e^{\lambda t}$ die Differenzialgleichung genau dann, wenn $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Wir haben also mit e^{-t}, e^t und der konstanten Einsfunktion drei linear unabhängige Lösungen gefunden. Diese bilden nach der Vorlesung somit eine Basis des Lösungsraums des homogenen Problems. Durch Raten sehen wir, dass $y(t) = -t$ eine partikuläre Lösung des Problems ist. Somit ist nach der Vorlesung die allgemeine Lösung des Problems gegeben durch

$$y(t) = ae^t + be^{-t} - t + c.$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen sieht man, dass $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ und $c = 1$. Also ist

$$y(t) = \sinh t - t + 1$$

die eindeutige globale Lösung des Problems.

16. Wir betrachten für $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{t^2}{1+\exp(y^{20}(t))} \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem eine eindeutige globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt. (+4)

Lösung: Die Gleichung ist von der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $f(t, y) = \frac{t^2}{1+\exp(y^{20})}$. Offensichtlich ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$. Man hat

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -\frac{20t^2 y^{19} \exp(y^{20})}{(1 + \exp(y^{20}))^2}.$$

Für $t \in [-M, M]$ gilt damit für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \leq 20M^2 \sup_{y \in \mathbb{R}} \frac{y^{19} \exp(y^{20})}{(1 + \exp(y^{20}))^2} < \infty.$$

Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz besitzt somit die Gleichung eine eindeutige maximale Lösung, die zumindest auf dem Intervall $[-M, M]$ existiert. Da $M > 0$ beliebig ist, ist die maximale Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Begründe in Abhängigkeit von dem Anfangswert y_0 in welchem Sinne $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)$ existiert (eigentlich, uneigentlich, gar nicht). (+4)

Lösung: Die rechte Seite der Differenzialgleichung ist für alle $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ nicht-negativ. Somit ist die Lösung y für alle Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend. Daraus folgt, dass die Lösung unabhängig vom Anfangswert für $t \to \pm\infty$ einen eventuell uneigentlichen Grenzwert besitzt. Wir zeigen nun, dass tatsächlich immer $y(t) \to \pm\infty$ für $t \to \pm\infty$ gilt. Wir behandeln nur den Grenzwert für $t \to \infty$, da die Argumentation für den zweiten Grenzwert völlig analog verläuft. Nehmen wir an, dass $\lim_{t\to\infty} y(t) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Da y monoton wachsend ist, folgt hieraus $y(t) \le c$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die globale Lösung $y(t)$ erfüllt für $|t| \ge 1$ somit die Abschätzung

$$y'(t) \ge \frac{1}{1 + \exp(y^{20}(t))} \ge \frac{1}{1 + \exp(c^{20})} =: \varepsilon.$$

Hieraus folgt aber für $t \ge 1$

$$y(t) = y(1) + \int_1^t y'(s)\,ds \ge y(1) + (t-1)\varepsilon$$

und damit $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ und $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$ für alle Anfangswerte.

17. *Matrixexponentialfunktion.* Bestimme e^A für $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (5)

Lösung: Wie in der Vorlesung besprochen, lässt sich e^A mithilfe der Diagonalisierung von A berechnen (falls diese existiert). Wir bestimmen dazu als erstes die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Ein Paar kann man sofort ablesen: Es gilt $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die anderen zwei Eigenwerte reicht es nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz aus die Nullstellen von

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

zu bestimmen. Also haben wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Es bleiben die dazugehörigen Eigenvektoren v_i zu bestimmen. Dazu lösen wir für $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Für $\lambda_3 = 3$ löst man

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Also ist $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$. Damit gilt mit der Basiswechselmatrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \operatorname{diag}(1, 2, 3)$

$$A = SDS^{-1}.$$

Um e^A berechnen zu können, müssen wir also noch S^{-1} bestimmen. Es ist

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Hier haben wir nacheinander die elementaren Zeilenoperationen I - III, I - 2III und II -2I durchgeführt. Also ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(SDS^{-1})^k}{k!} = S \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e & 0 & 2e \\ 2e^2 & e^2 & -4e^2 \\ e^3 & 0 & -e^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^3 - e & 0 & 2e - 2e^3 \\ 2e^2 - 2e & e^2 & 4e - 4e^2 \\ e^3 - e & 0 & 2e - e^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

18. *Systeme mit konstanten Koeffizienten.* Bestimme jeweils ein reelles Fundamentalsystem.

(a) (5)

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) \\ y_2'(t) &= y_3(t) \\ y_3'(t) &= y_2(t). \end{aligned}$$

Lösung: Umgeschrieben interessieren wir uns für das System $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Durch einen scharfen Blick sieht man, dass die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$ und dass dazugehörige Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ sind. Nach der Vorlesung ist also ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

(b) (5)

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 5y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + 5y_2(t). \end{aligned}$$

Lösung: Umgeschrieben haben wir dieses mal $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist symmetrisch, also auf jeden Fall diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom von A ist $(5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24$. Dieses besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 4$. Man sieht wieder durch scharfes Hinsehen oder mit einer kurzen Rechnung, dass $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ dazugehörige Eigenvektoren sind. Also ist

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{6t} & e^{4t} \\ e^{6t} & -e^{4t} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung.

19. *Picard-Iteration.* Bestimme mit Hilfe der Picard-Iteration die Lösung des AWPs (5)

$$\begin{cases} y'(t) & = y(t) + 1 \\ y(0) & = 0. \end{cases}$$

Lösung: Einsetzen der Anfangsbedingungen in die allgemeine Formel für die Picard-Iteration ergibt die rekursive Formel $y_{n+1}(t) = \int_0^t y_n(s) + 1\,ds$ mit $y_0(t) = 0$. Durch Nachrechnen der ersten Folgenglieder sieht man, dass anscheinend $y_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wir zeigen die Gültigkeit der obigen Formel per vollständiger Induktion. Für $n = 0$ stimmt die Formel offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass $y_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!}$ gilt. Dann ist

$$y_{n+1}(t) = \int_0^t y_n(s)\,ds + t = \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{s^k}{k!}\,ds + t = \sum_{k=1}^n \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + t = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k!}.$$

Man sieht nun, dass die Picard-Iteration y_n (gleichmäßig auf Kompakta) gegen $y(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{t^k}{k!} = e^t - 1$ konvergiert.