Crashkurs: Diagonalisieren

Lösungstricks & andere wichtige Dinge

Wir besprechen hier einige Lösungstricks für Diagonalisierung. Manche der Aufgaben kommen von einem Aufgabenblatt, welches im Netz steht. Die versprochenen wichtigen Lösungsmethoden findet man hier: **Frage:** A_i diag? $\rightsquigarrow$ Diag. berechnen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufg 2: A_2)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufg. 1: A_2)

$$A_3 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufg 1: A_1)

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufg 1: A_4)

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufg 4: A_1)

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufg 4: A_6)

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufg 4: A_4)

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & i & 25 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufgabe 4: A_5)

$$A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
($\hat{=}$ Aufgabe 2: A_1)

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
(neu)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
(neu)

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
(neu)

keine Lösung

[auch wenige neue Methoden dabei]

Diagonalmatrizen sind diagonalisierbar

A_1 ist eine Diagonalmatrix

$\Rightarrow$ A_1 ist diagonalisierbar

$$A_1 = X D X^{-1} \quad \text{mit } D = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X = E_2$$

Symmetrieargument

$$P_{A_2}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda+i)(\lambda-i)$$

$\Rightarrow$ EW: $\pm i$

ER bestimmen:

ER zu i:

$(A_2 - iE_2)v = 0$ lösen

Gauß:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \text{nicht Pivot} \\ \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{-i \quad 1} \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

(geht auch ohne Gauß, da man immer eine Zeile streichen kann → siehe später)

$$\Rightarrow \text{ER} \mathrel{\hat{=}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

← Basis des ER.

ER zu $-i$:

Aus Symmetriegründen ist der ER zu $-i$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle \text{ mit Basis } \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

- man kann dies formal begründen über

$$A_2 v = \lambda v \Leftrightarrow \overline{A_2 v} = \overline{\lambda v} \underset{A_2 \text{ reell}}{\Leftrightarrow} A_2 \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$$

$$\Rightarrow A_2 \text{ diag. mit } A_2 = X D X^{-1}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Entsprechendes gilt auch, wenn EW Wurzeln enthalten, die irrational sind, aber die Matrix nur rationale Einträge hat.

Bsp: A_7

Symmetrieargument – funktioniert nicht

$$P_{A_3}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} i-\lambda & 1 \\ 0 & -i-\lambda \end{pmatrix} = (i-\lambda)(-i-\lambda)$$

$\rightsquigarrow$ EW: $\pm i$ (Da A_2 ob. Δ-Mat gilt: EW $\hat{=}$ Diagonalelementen $\rightsquigarrow$ P_{A_2} berechnen ist überflüssig!)

ER bestimmen:

ER zu i:

$(A_3 - iE_2)v = 0 \iff$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} v = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$\iff v \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ Basis

hätte man auch durch "scharfes hinsehen" raten können.

ER zu $-i$:

$(A_3 + iE_2)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 2i & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$

$\iff v \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \end{pmatrix} \right\rangle$ Basis

$\Rightarrow$ A_3 diag. mit

$$A_3 = XDX^{-1}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Aber: Symmetrieargument von eben funktioniert nicht!

Warum? $\rightsquigarrow$ A_3 ist nicht reell.

Eigenräume mit Dimension > 1

P_{A_4} müssen wir nicht ber. (A_4 ist ob. Δ-Mat)

Man kann direkt ablesen:

EW: 1 (mit alg. Vielf 2) und -1 (mit Alg. V. 1)

ER bestimmen:

ER zu 1:

$$(A_4 - E_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Leftrightarrow v \in \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Basis}} \rangle$$

ER zu -1:

$$(A_4 + E_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Leftrightarrow v \in \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

$\Rightarrow$ A_4 ist diag. mit

$$A_4 = \mathcal{X} D \mathcal{X}^{-1}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$