Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 120+60

Klausur Elemente der Differenzialgleichungen

Es gibt in der Klausur 60 Bonuspunkte (5 davon versteckt). Diese sind mit einem Pluszeichen hinter der Punktzahl gekennzeichnet. Bitte beachtet die Rückseite!

1. Bestimme eine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und das maximale Existenzintervall dieser Lösung (hierfür muss keine Begründung gegeben werden). Zeige oder widerlege jeweils die Eindeutigkeit dieser Lösung.

(a) $y'(t) = y(t) + 5$ mit $y(0) = -4$. (10)

(b) $y'(t) = (y(t) - 2)^2$ mit $y(0) = 2$. (10)

(c) $\cos(ty(t))(ty'(t) + y(t)) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit $y(1) = 2\pi$. (10)

(d) $y'''(t) - 5y''(t) + 6y'(t) = 0$ mit $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ und $y''(0) = 13$. (10)

2. Bestimme jeweils ein reelles Fundamentalsystem der folgenden Differenzialgleichungssysteme und gebe die Gesamtmenge aller Lösungen der Probleme an.

(a) (20)

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 14y_1(t) - 6y_3(t) \\ y_2'(t) &= 2y_2(t) \\ y_3'(t) &= 20y_1(t) - 8y_3(t). \end{aligned}$$

(b) (20)

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) + 25t \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + 3y_2(t). \end{aligned}$$

3. Sei $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$. Wir betrachten für $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem (15)

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(t) + g(t) \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Leite mit Hilfe eines Variation der Konstanten-Ansatzes eine Formel zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Gleichung her.

4. Seien $p, q, r \in C(\mathbb{R})$. Zeige, dass das Anfangswertproblem (20)

$$\begin{cases} y'''(t) + p(t)y''(t) + q(t)y'(t) + r(t)y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ y''(0) = y_2 \end{cases}$$

für alle $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Bemerkung: In der Vorlesung gibt es einen entsprechenden Satz für Systeme *zweiter* Ordnung, aber nicht für Systeme dritter Ordnung. Man kann also nicht einen Satz aus der Vorlesung *direkt* anwenden, aber man kann dieselbe Idee wie für Systeme zweiter Ordnung benutzen.

5. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t)^3 - t^9 y_1(t)\exp(y_1(t)) \\ y_2'(t) &= -y_1(t)y_2(t)^2 - 3y_2(t)^3 \sinh t \\ y_1(0) &= a \\ y_2(0) &= b \end{cases}$$

(a) Zeige, dass das System für jeden Anfangswert $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige lokale Lösung $y : I \to \mathbb{R}^2$ besitzt. (5)

(b) Sei $r > 0$. Zeige: Ist $(a,b) \in \overline{B}(0,r) := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \|(a,b)\|_2 \leq r\}$, so gilt $(y_1(t), y_2(t)) \in \overline{B}(0,r)$ für alle $t \in I$. (+15)
Hinweis: Betrachte die zeitliche Änderung der euklidischen Norm der Lösung.

(c) Zeige, dass für jeden Anfangswert (a,b) die maximale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Systems global ist, d.h. $I = \mathbb{R}$ gilt. (+10)

(d) Bestimme in Abhängigkeit vom Anfangswert ob die Lösungen für $t \to \infty$ konvergieren. (+30*)