Universität Ulm

Mittwoch, 25.9.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 120+60

Lösungen zur Klausur Elemente der Differenzialgleichungen

Es gibt in der Klausur 60 Bonuspunkte (5 davon versteckt). Diese sind mit einem Pluszeichen hinter der Punktzahl gekennzeichnet. Bitte beachtet die Rückseite!

1. Bestimme eine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und das maximale Existenzintervall dieser Lösung (hierfür muss keine Begründung gegeben werden). Zeige oder widerlege jeweils die Eindeutigkeit dieser Lösung.

(a) $y'(t) = y(t) + 5$ mit $y(0) = -4$. (10)

Lösung: Die Gleichung ist eine lineare inhomogene Differenzialgleichung erster Ordnung. Diese besitzen nach der Vorlesung eine eindeutige globale Lösung. Wir bestimmen die Lösung mit der Methode der getrennten Veränderlichen. Für die Lösung y gilt lokal um den Anfangswert

$$\frac{y'(t)}{y(t)+5} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{d}{ds} \log(y(s)+5)\, ds = \log(y(t)+5) - \log(y(0)+5) = \log(y(t)+5) = t.$$

Also ist $y(t) = e^t - 5$. Da dies unser einziger Kandidat ist, haben wir also schon die globale Lösung des Problems gefunden.

Alternativ kann man natürlich auch die Lösungsformel aus der Vorlesung benützen.

(b) $y'(t) = (y(t) - 2)^2$ mit $y(0) = 2$. (10)

Lösung: Man sieht, dass $y(t) = 2$ das AWP löst. Zudem ist $f(t, y) = (y - 2)^2$ stetig differenzierbar. Nach dem EES besitzt die Gleichung also eine eindeutige Lösung. Die Lösung ist offensichtlich global.

(c) $\cos(ty(t))(ty'(t) + y(t)) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ mit $y(1) = 2\pi$. (10)

Lösung: Man sieht durch scharfes Hinsehen, dass y die Differenzialgleichung genau dann löst, wenn

$$\sin(ty(t)) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + c$$

für eine reelle Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt. Soll zusätzlich die Anfangswertbedingung erfüllt sein, muss $\sin(2\pi) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c = c$, also $c = 0$, gelten. Auflösen der Gleichung (beachte den richtigen Zweig des Arcussinus) ergibt dann

$$y(t) = \frac{\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right) + 2\pi}{t}.$$

Wir zeigen nun die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Hieraus sehen wir dann, dass y die Gleichung löst (einen anderen Kandidaten haben wir ja nicht). Beachte dazu, dass lokal um den Anfangswert die Gleichung äquivalent ist zu der Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{t} \left(-\frac{\pi}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)}{\cos(ty(t))} - y(t) \right).$$

Man sieht nun, dass $f(t, y) = \frac{1}{t} \left(-\frac{\pi}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)}{\cos(ty)} - y \right)$ stetig differenzierbar ist. Aus dem EES folgt nun die Eindeutigkeit der Lösung, falls $ty \neq 0$, also insbesondere lokal um den Anfangswert. Die Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs ist etwas subtil. Wir schauen uns dafür den Zähler $z(t)$ der Lösung an. Dieser ist für alle reellen Zahlen definiert und definiert dort eine stetige Funktion. Was ist mit der Ableitung? Für diese gilt für $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \neq 0$, dass

$$z'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}}\left(-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) = -\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right|}$$

Untersucht man nun den rechts- und linksseitigen Grenzwert an den Nullstellen von $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, so unterscheiden sich diese um ein Vorzeichen. Aus dem Mittelwertsatz folgt nun direkt, dass z an diesen Stellen nicht differenzierbar sein kann. Nach der Definition einer Lösung ist also das maximale Lösungintervall gegeben durch $I = (0, 2)$.

Für das Erkennen dieser Subtilität (und nicht nur das richtige Ergebnis) gibt es 5 Bonuspunkte!

(d) $y'''(t) - 5y''(t) + 6y'(t) = 0$ mit $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ und $y''(0) = 13$. (10)

Lösung: Bei der Gleichung handelt es sich um eine lineare Differenzialgleichung dritter Ordnung. Diese besitzen nach der Vorlesung eine eindeutige globale Lösung. Nach der Vorlesung können wir die Lösung folgendermaßen bestimmen. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

ergeben als allgemeine Lösung des Problems

$$y(t) = ae^{3t} + be^{2t} + c.$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 3a + 2b &= 5 \\ 9a + 4b &= 13. \end{aligned}$$

Dieses wird durch $a = b = c = 1$ gelöst. Also ist $y(t) = e^{3t} + e^{2t} + 1$ die eindeutige Lösung des Systems.

2. Bestimme jeweils ein reelles Fundamentalsystem der folgenden Differenzialgleichungssysteme und gebe die Gesamtmenge aller Lösungen der Probleme an.

(a) (20)

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 14y_1(t) - 6y_3(t) \\ y_2'(t) &= 2y_2(t) \\ y_3'(t) &= 20y_1(t) - 8y_3(t). \end{aligned}$$

Lösung: Die zweite Unbekannte y_2 ist entkoppelt vom restlichen System und besitzt die Lösungen $y_2(t) = ce^{2t}$. Es reicht also aus das reduzierte System ohne y_2 zu betrachten. Dieses ist von der Form $y'(t) = Ay(t)$ mit $A = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 20 & -8 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$(14 - \lambda)(-8 - \lambda) + 120 = \lambda^2 - 6\lambda - 112 + 120 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2).$$

Die Matrix A besitzt also die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Damit ist $U(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 3e^{4t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & 0 & 5e^{4t} \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem. Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit $\{U(t)c : c \in \mathbb{R}^3\}$.

(b) (20)

$$y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) + 25t$$
$$y_2'(t) = -y_1(t) + 3y_2(t).$$

Lösung: Die homogene Gleichung ist von der Form $y'(t) = Ay(t)$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ist

$$(1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Die Nullstellen des Polynoms sind $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Der Eigenvektor zu $2+i$ ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt sofort, dass $v_2 = \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $2-i$ ist. Ein Fundamentalsystem ist somit gegeben durch $\begin{pmatrix} (1-i)e^{(2+i)t} & (1+i)e^{(2-i)t} \\ e^{(2+i)t} & e^{(2-i)t} \end{pmatrix}$. Nimmt man den Real- und Imaginärteil der ersten Spalte, so erhält man das reelle Fundamentalsystem $U(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t + \sin t) & e^{2t}(\sin t - \cos t) \\ e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$. Um die Lösungsgesamtheit hinschreiben zu können, brauchen wir noch eine partikuläre Lösung. Diese können wir über die Variation der Konstanten-Formel bestimmen. Alternativ kann man auch feststellen, dass alle Lösungen der Gleichung beliebig oft differenzierbar sind und man daher durch Differenzieren der zweiten Gleichung $y_2''(t) = -y_1'(t) + 3y_2'(t)$ erhält. Benützt man dies um in der ersten Gleichung alle Terme mit y_1 zu entfernen, so erhält man

$$3y_2'(t) - y_2''(t) = 3y_2(t) - y_2'(t) + 2y_2(t) + 25t \quad \Leftrightarrow \quad y_2''(t) - 4y_2'(t) + 5y_2(t) = -25t.$$

Mit dem Ansatz $y_2(t) = at + b$ erhält man die Gleichung $-4a + 5at + 5b = -25t$ und damit das Gleichungssystem

$$5a = -25$$
$$5b - 4a = 0.$$

Dieses wird durch $a = -5$ und $b = -4$ gelöst. Hieraus folgt $y_2(t) = -5t - 4$ und $y_1(t) = 3y_2(t) - y_2'(t) = -15t - 12 + 5 = -15t - 7$. Damit ist

$$y_{\mathrm{par}}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15t - 7 \\ -5t - 4 \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung der Gleichung. Nach der Vorlesung lässt sich jede Lösung als die Summe einer Linearkombination der Spalten des Fundamentalsystems und einer partikulären Lösung schreiben, die Menge aller Lösungen ist also $\{U(t)c + y_{\mathrm{par}}(t) : c \in \mathbb{R}^2\}$.

3. Sei $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$. Wir betrachten für $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem (15)

$$y'(t) = A(t)y(t) + g(t)$$
$$y(0) = y_0.$$

Leite mit Hilfe eines Variation der Konstanten-Ansatzes eine Formel zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Gleichung her.

Lösung: Sei $U(t)$ ein Fundamentalsystem der Gleichung. Wir machen den Variation der Konstanten-Ansatz $y(t) = U(t)c(t)$ mit einer unbekannten vetorwertigen Funktion c. Einsetzen in die Gleichung ergibt mit $U'(t)d = A(t)U(t)d$ für alle $d \in \mathbb{R}^n$

$$y'(t) = U'(t)c(t) + U(t)c'(t) = A(t)U(t)c(t) + U(t)c'(t) = A(t)y(t) + g(t) = A(t)U(t)c(t) + g(t).$$

Hieraus folgt $U(t)c'(t) = g(t)$. Da $U(t)$ ein Fundamentalsystem ist, ist $U(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar. Somit folgt etwa $c(t) = \int_0^t U^{-1}(s)g(s)\,ds$. Insgesamt folgt also

$$y(t) = U(t)c(t) = U(t)\int_0^t U^{-1}(s)g(s)\,ds.$$

4. Seien $p, q, r \in C(\mathbb{R})$. Zeige, dass das Anfangswertproblem (20)

$$\begin{cases} y'''(t) + p(t)y''(t) + q(t)y'(t) + r(t)y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ y''(0) = y_2 \end{cases}$$

für alle $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Bemerkung: In der Vorlesung gibt es einen entsprechenden Satz für Systeme *zweiter* Ordnung, aber nicht für Systeme dritter Ordnung. Man kann also nicht einen Satz aus der Vorlesung *direkt* anwenden, aber man kann dieselbe Idee wie für Systeme zweiter Ordnung benutzen.

Lösung: Wir schreiben die Gleichung in ein Differenzialgleichungssystem um. Dazu setzen wir $z_1(t) := y(t)$, $z_2(t) := y'(t)$ und $z_3(t) := y''(t)$. Mit diesen Bezeichnungen ist die obere Gleichung äquivalent zu der Gleichung

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r(t) & -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}.$$

Definiere $f(t, z_1, z_2, z_3)$ als die rechte Seite der Gleichung. Diese erfüllt

$$\max_{1 \le i,j \le 3} \left| \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right| (t, z_1, z_2, z_3) \le \max\{1, |r(t)|, |q(t)|, |p(t)|\}.$$

Nach dem globalen EES besitzt die Gleichung damit eine eindeutige Lösung auf jedem kompakten Zeitintervall, da stetige Funktionen auf Kompakta beschränkt sind. Da wir $\mathbb{R}$ durch Kompakta aussschöpfen können, besitzt die Gleichung eine eindeutige globale Lösung.

5. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t)^3 - t^9 y_1(t)\exp(y_1(t)) \\ y_2'(t) &= -y_1(t)y_2(t)^2 - 3y_2(t)^3 \sinh t \\ y_1(0) &= a \\ y_2(0) &= b \end{cases}$$

(a) Zeige, dass das System für jeden Anfangswert $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige lokale Lösung $y : I \to \mathbb{R}^2$ besitzt. (5)

Lösung: Die Gleichung ist von der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $f(t, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2^3 - t^9 y_1 \exp y_1 \\ -y_1 y_2^2 - 3y_2^3 \sinh t \end{pmatrix}$. Die Funktion f ist offensichtlich stetig differenzierbar. Nach dem lokalen EES besitzt die Gleichung also eine eindeutige lokale Lösung.

(b) Sei $r > 0$. Zeige: Ist $(a, b) \in \overline{B}(0, r) := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \|(a, b)\|_2 \le r\}$, so gilt $(y_1(t), y_2(t)) \in \overline{B}(0, r)$ für alle $t \in I$. (+15)

Hinweis: Betrachte die zeitliche Änderung der euklidischen Norm der Lösung.

Lösung: Sei $y : I \to \mathbb{R}^2$ eine lokale Lösung. Dann gilt für alle $t \in I$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y_1(t)^2 + y_2(t)^2) &= 2y_1(t)y_1'(t) + 2y_2(t)y_2'(t)\\ &= 2y_1(t)(y_2(t)^3 - t^9 y_1(t)\exp(y_1(t)) + 2y_2(t)(-y_1(t)y_2(t)^2 - 3y_2(t)^3 \sinh t)\\ &= 2y_1(t)y_2(t)^3 - 2t^9 y_1(t)^2 \exp(y_1(t)) - 2y_1(t)y_2(t)^3 - 6y_2(t)^4 \sinh t\\ &= -2t^9 y_1(t)^2 \exp(y_1(t)) - 6y_2(t)^4 \sinh t.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun zwei Fälle. Für $t \geq 0$ sind beide Terme nicht-positiv, für $t \leq 0$ sind beide Terme nicht-negativ.
Zusammengefasst haben wir also

$$\frac{d}{dt}\|(y_1, y_2)(t)\|_2^2 \quad \begin{cases} \leq 0, & t \geq 0\\ \geq 0, & t \leq 0\end{cases}$$

Hieraus folgt, dass die Funktion $t \mapsto \|(y_1, y_2)(t)\|_2$ ein globales Maximum in $t = 0$ besitzt. Mit anderen Worten: Ist $(y_1(0), y_2(0)) = (a, b) \in \overline{B}(0, r)$, so gilt auch $(y_1(t), y_2(t)) \in \overline{B}(0, r)$.

(c) Zeige, dass für jeden Anfangswert (a, b) die maximale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Systems global ist, d.h. $I = \mathbb{R}$ gilt. (+10)

Lösung: Nach dem Globalitätskriterium aus der Vorlesung bleibt die maximale Lösung der Gleichung in keinem Kompaktum der Form $[-T, T] \times K$ mit $T > 0$ und $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Wählen wir $K = \overline{B}(0, r)$ mit $r = \|(a, b)\|_2$, so folgt aus dem vorherigen Teil, dass die maximale Lösung die Kompakta nur in der Zeitkomponente verlassen kann. Insbesondere existiert die Lösung auf Intervallen der Form $[-T, T]$ mit $T > 0$ beliebig. Hieraus folgt, dass die maximale Lösung global ist.

(d) Bestimme in Abhängigkeit vom Anfangswert ob die Lösungen für $t \to \infty$ konvergieren. (+30*)

Lösung: Wir setzen $r(t) = \|y(t)\|_2^2$, wobei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die globale Lösung des Problems zu einem beliebigen Anfangswert $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet. Aus Teil (b) folgt, dass $0 \leq r(t) \leq \|(a, b)\|_2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt und dass r monoton fallend ist. Hieraus folgt, dass $r(t)$ für $t \to \infty$ gegen einen Wert $r_0 \geq 0$ konvergiert. Wir wollen zeigen, dass $r_0 = 0$ gelten muss. Nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall. Dann folgt wegen $r(t) \to r_0$ für $t \to \infty$, dass es ein $T > 0$ gibt mit $r(t) \geq 2\varepsilon = \frac{r_0}{2} > 0$ für alle $t \geq T$. Hieraus folgt, dass für jedes $t \geq T$ entweder $y_1^2(t) \geq \varepsilon$ oder $y_2^2(t) \geq \varepsilon$ gilt; denn ansonsten wäre $r(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen:

1. Es gilt $y_2^2(t) \geq \varepsilon$: Mit der Abschätzung aus Teil b) folgt
$$\frac{d}{dt}r(t) \leq -6\varepsilon^2 \sinh t \leq -6\varepsilon^2 \sinh T$$
für alle $t \geq T$.
2. Es gilt $y_1^2(t) \geq \varepsilon$: Wegen $y_1^2(t) \leq r(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $y_1(t) \geq -\sqrt{r(0)}$. Mit diesen beiden Abschätzungen folgt aus Teil b)
$$\frac{d}{dt}r(t) \leq -2t^9 \varepsilon \exp(-\sqrt{r(0)}) \leq -2T^9 \varepsilon \exp(-\sqrt{r(0)})$$
für alle $t \geq T$.

Insgesamt gibt es also ein $\delta > 0$ mit $\frac{d}{dt}r(t) \leq -\delta$ für alle $t \geq T$. Dies steht aber im Widerspruch zur Konvergenz der Lösung. Somit muss $r_0 = 0$ gelten. Also ist

$$\limsup_{t \to \infty} |y_i(t)| \leq \limsup_{t \to \infty} r(t) = 0$$

für $i = 1, 2$. Dies zeigt, dass $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$ für alle Anfangswerte (a, b).