UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 20.6.2013

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 35+10

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 1

Bitte im SLC für die Vorlesung anmelden!

1. *Polarkoordinaten.* In dieser Aufgabe wollen wir den Umgang mit Polarkoordinaten üben.

(a) Schreibe $z = 1 + i$ in Polarkoordinaten und bestimme z^{1000}. (3)

(b) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ ($0 \notin G \subset \mathbb{C}$ Gebiet) und $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ die dazu assoziierte Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Man kann $\tilde{f}$ nun alternativ in Polarkoordinaten (r, φ), also $z = re^{i\varphi}$ oder äquivalent $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, darstellen. Zeige, dass f genau dann holomorph ist, wenn $\tilde{f}$ Fréchet-differenzierbar ist und auf G als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ gilt: (4)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

2. *Holomorphe Funktionen.* Zeige jeweils direkt mit der Definition (d.h. der Existenz des Differenzialquotienten) und dem Kriterium über die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen (Theorem 1.15), dass folgende Funktionen $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph / nicht holomorph sind.

(a) $f(z) = z^2$ mit $G = \mathbb{C}$. (4)

(b) $f(z) = \operatorname{Re} z$ mit $G = \mathbb{C}$. (4)

(c) $f(z) = \frac{1}{z}$ mit $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (4)

3. *Die Potenzfunktion.* In der Vorlesung wurde die Potenzfunktion definiert als

$$z^w := \exp(w \log z),$$

wobei log den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Man könnte alternativ den komplexen Logarithmus als mengenwertige Funktion betrachten, indem man einem $w \in \mathbb{C}^*$ alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp z = w$ zuweist. Mit dieser Konvention wird auch die Potenzfunktion mengenwertig. Wir wollen (ausschließlich) in dieser Aufgabe diese mengenwertige Funktion untersuchen.

Bestimme die Werte der (mengenwertigen) Potenzen

(a) i^i. (2)

(b) $2^{1/n}$ für $n \in \mathbb{N}$. (2)

(c) a^b für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. (2)

4. *Harmonische & holomorphe Funktionen.* Wir betrachten $u(x, y) := x^2 - y^2$ auf $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeige, dass u harmonisch ist. (2)

(b) Bestimme, falls möglich, eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (2)

5. *Der komplexe Logarithmus.* Sei $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des (komplexen) Logarithmus aus der Vorlesung.

(a) Bestimme $\log(-2-2i)$. (2)

(b) In Lemma 1.9(b) haben wir gesehen, dass log an allen Punkten $z \in \mathbb{R}_{<0}$ unstetig ist. Zeige, dass jedoch die Einschränkung $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorph ist und bestimme deren (komplexe) Ableitung. (4)

Hinweis: Verwende Satz 1.30 aus der Vorlesung.

6. *Die Fréchet-Ableitung.* In dieser Zusatzaufgabe wollen wir noch einmal den Begriff der Fréchet-Ableitung wiederholen. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Vektorräume (über $\mathbb{R}$). Eine Abbildung $f : U \to Y$ ($U \subset X$ offen) heißt *Fréchet-differenzierbar* (oder *total differenzierbar*) in $x_0 \in U$, falls es eine stetige lineare Abbildung $A : X \to Y$ gibt mit

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Man schreibt in diesem Fall $f'(x_0) := A$. Wir wollen in dieser Aufgabe diesen Ableitungsbegriff verinnerlichen.

(a) Sei $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen $n \times n$-Matrizen. Wir versehen diesen mit der *Hilbert-Schmidt-Norm* oder *Frobeniusnorm*: $\|(a_{ij})\|^2 := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$ (also der euklidischen Norm in den Einträgen). Diese erfüllt $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (Submultiplikativität). Zeige, dass

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^2 \end{aligned}$$

in jedem Punkt Fréchet-differenzierbar ist und bestimme die Ableitung von f. (+5)

(b) Wir betrachten nun den normierten Vektorraum $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Dann können wir für eine Fréchet-differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die linearen Abbildungen $f'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ($x \in \mathbb{R}^d$) mit den Abbildungsmatrizen A_x bezüglich der kanonischen Basis identifizieren. Zeige: Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Fréchet-differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ auf $\mathbb{R}^d$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und bezüglich der oberen Identifikation gilt (+5)

$$f'(x) = A_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Umgekehrt haben wir in Analysis II gelernt: Existieren $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ in einer Umgebung U eines Punktes $x \in \mathbb{R}^d$ und sind diese stetig in U für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, so ist f Fréchet-differenzierbar in U mit stetiger Ableitung. Die Fréchet-Ableitung ist dann gegeben als

$$f'(x) : \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix} \mapsto A_x(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^d$.