Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 20.6.2013

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 35+10

Lösungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 1

Bitte im SLC für die Vorlesung anmelden!

1. *Polarkoordinaten.* In dieser Aufgabe wollen wir den Umgang mit Polarkoordinaten üben.

(a) Schreibe $z = 1 + i$ in Polarkoordinaten und bestimme z^{1000}. (3)

Lösung: Man sieht, dass $\arg z = \frac{\pi}{4}$ und $|z| = \sqrt{2}$. Also ist $z = \sqrt{2}\exp(i\frac{\pi}{4})$ in Polarkoordinaten. Demnach ist

$$z^{1000} = \sqrt{2}^{1000} \exp\left(i1000\frac{\pi}{4}\right) = 2^{500}\exp(2\pi i \cdot 125) = 2^{500}.$$

(b) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ ($0 \notin G \subset \mathbb{C}$ Gebiet) und $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ die dazu assoziierte Funktion $\tilde{f} : \tilde{G} \to \mathbb{R}^2$. Man kann $\tilde{f}$ nun alternativ in Polarkoordinaten (r, φ), also $z = re^{i\varphi}$ oder äquivalent $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, darstellen. Zeige, dass f genau dann holomorph ist, wenn $\tilde{f}$ Fréchet-differenzierbar ist und auf G als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ gilt: (4)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Lösung: Sei f holomorph. Dann ist nach Vorlesung $\tilde{f}$ Fréchet-differenzierbar und in Polarkoordinaten gilt für $\tilde{f}(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + iv(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial y} = r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y} + r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}$$

die Identität $r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}$. Analog gilt wegen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= \cos\varphi\frac{\partial v}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial v}{\partial y} = -\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y} + \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}$$

die Identität $r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

Sei nun umgekehrt $\tilde{f}$ Fréchet-differenzierbar und es gelten die obigen Gleichungen. Dann ist

$$\tilde{f}'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & -r\frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & r\frac{\partial u}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Zudem hat man nach der Kettenregel

$$\tilde{f}'(r, \varphi) = J\tilde{f}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Auflösen nach $J\tilde{f}$ ergibt

$$\begin{aligned}
J\tilde{f}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & -r\frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & r\frac{\partial u}{\partial r} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi & \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi - \frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi \\ \frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi & \frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also ist die Jacobi-Matrix bezüglich der kanonischen Basis an jedem Punkt von der Form $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Nach Lemma 1.14 aus der Vorlesung ist die Jacobi-Matrix also $\mathbb{C}$-linear. Damit ist f an jedem Punkt aus G komplex differenzierbar und damit auf G holomorph.

2. *Holomorphe Funktionen.* Zeige jeweils direkt mit der Definition (d.h. der Existenz des Differenzialquotienten) und dem Kriterium über die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen (Theorem 1.15), dass folgende Funktionen $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph / nicht holomorph sind.

(a) $f(z) = z^2$ mit $G = \mathbb{C}$. (4)

Lösung: Die Funktion f ist holomorph mit $f'(z) = 2z$. Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{2zh + h^2}{h} = 2z + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2z.$$

Es gilt $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u(x, y) = x^2 - y^2$ und $v(x, y) = 2xy$. Sowohl u als auch v sind nach beiden Variablen stetig partiell differenzierbar. Also ist f aufgefasst als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Fréchet-differenzierbar. Für die Holomorphie genügt es also zu zeigen, dass u und v an jedem Punkt die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllen. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2x & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= 2x \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2y & \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= 2y. \end{aligned}$$

(b) $f(z) = \operatorname{Re} z$ mit $G = \mathbb{C}$. (4)

Lösung: Die Funktion f ist an keinem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und damit auch an keinem Punkt holomorph. Denn für $z \in \mathbb{C}$ gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\operatorname{Re}(z+h) - \operatorname{Re} z}{h} = \frac{\operatorname{Re} h}{h}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert nicht für $h \to 0$, denn für $h \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert 1, während für $h \in i\mathbb{R}$ der Grenzwert 0 ist. Es gilt $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = 0$. Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

und somit ist f an keinem Punkt komplex differenzierbar.

(c) $f(z) = \frac{1}{z}$ mit $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (4)

Lösung: Die Funktion f ist holomorph mit $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ für $z \neq 0$. Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = \frac{\frac{z-(z+h)}{z(z+h)}}{h} = -\frac{1}{z(z+h)} \xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{1}{z^2}.$$

Es ist $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ und somit gilt $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$. Sowohl u als auch v sind nach beiden Variablen für $(x, y) \neq 0$ stetig partiell differenzierbar. Also ist f aufgefasst als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Fréchet-differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für die Holomorphie genügt es also zu zeigen, dass u

und v an jedem Punkt $(x, y) \neq 0$ die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllen. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad & \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

3. *Die Potenzfunktion.* In der Vorlesung wurde die Potenzfunktion definiert als

$$z^w := \exp(w \log z),$$

wobei log den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Man könnte alternativ den komplexen Logarithmus als mengenwertige Funktion betrachten, indem man einem $w \in \mathbb{C}^*$ alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp z = w$ zuweist. Mit dieser Konvention wird auch die Potenzfunktion mengenwertig. Wir wollen (ausschließlich) in dieser Aufgabe diese mengenwertige Funktion untersuchen.

Bestimme die Werte der (mengenwertigen) Potenzen

(a) i^i. (2)

Lösung: Es ist (wobei n die ganzen Zahlen durchläuft)

$$i^i = \exp(i \log i) = \exp(i(\log_{\mathbb{R}}(|i|) + i \arg i) = \exp\left(i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = \exp\left(-\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\right).$$

Also ist $i^i = \{\exp\left(-\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\right) : n \in \mathbb{Z}\}$. Insbesondere enthält diese mengenwertige Potenz beliebig kleine und große reelle Zahlen!

(b) $2^{1/n}$ für $n \in \mathbb{N}$. (2)

Lösung: Es ist (wobei m die ganzen Zahlen durchläuft)

$$2^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}(\log_{\mathbb{R}} 2 + 2\pi i m)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\log_{\mathbb{R}} 2\right)\exp\left(i 2\pi \frac{m}{n}\right).$$

Man sieht daraus (mit Hilfe der Vorlesung), dass $2^{1/n}$ als Menge gerade aus allen n-ten Wurzeln von 2 besteht, d.h. aus allen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = 2$.

(c) a^b für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. (2)

Lösung: Diese Aufgabe ist nur eine Verallgemeinerung der vorherigen. Man hat (wobei n die ganzen Zahlen durchläuft)

$$a^b = \exp(b(\log_{\mathbb{R}} a + 2\pi i n)) = \exp(b \log_{\mathbb{R}} a))\exp(2\pi i \cdot bn).$$

Man sieht aus der obigen Darstellung, dass diese mengenwertige Potenz die gewöhnlichen reellen Werte von a^b enthält und zusätzlich, salopp gesagt, gedrehte Punkte. Ist $b \in \mathbb{Q}$, so ist die Menge endlich, ansonsten enthält die Menge sogar unendlich viele Elemente!

4. *Harmonische & holomorphe Funktionen.* Wir betrachten $u(x, y) := x^2 - y^2$ auf $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeige, dass u harmonisch ist. (2)

Lösung: Es gilt

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2 = 0.$$

(b) Bestimme, falls möglich, eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (2)

Lösung: Wir haben bereits in Aufgabe 2a) nachgerechnet, dass $f(z) = z^2$ eine solche Funktion ist. Wir zeigen dennoch, wie man mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen systematisch auf dieses Ergebnis kommt. Das Vorgehen entspricht dem Berechnen von Stammfunktionen von Gradientenfeldern. Nehmen wir an, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ sei eine solche Funktion. Dann gilt nach den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x.$$

Also ist $v(x,y) = 2xy + g(x)$ mit einer x-abhängigen Funktion g. Verwenden der zweiten Gleichung ergibt.

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y + g'(x).$$

Also sind beide Gleichungen für $g'(x) = 0$, etwa also für $g(x) = 0$ erfüllt. Da u und v nach beiden Komponenten stetig differenzierbar sind, ist $u(x,y) + iv(x,y)$ aufgefasst als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Fréchet-differenzierbar. Nach der Vorlesung ist also

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy = (x+iy)^2$$

oder $f(z) = z^2$ eine holomorphe Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.

5. *Der komplexe Logarithmus.* Sei $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des (komplexen) Logarithmus aus der Vorlesung.

(a) Bestimme $\log(-2-2i)$. (2)

Lösung: Gemäß der Vorlesung ist

$$\log(-2-2i) = \log_{\mathbb{R}} |-2-2i| + i \arg(-2-2i) = \log_{\mathbb{R}}(2\sqrt{2}) - i\frac{3\pi}{4}.$$

(b) In Lemma 1.9(b) haben wir gesehen, dass log an allen Punkten $z \in \mathbb{R}_{<0}$ unstetig ist. Zeige, dass jedoch die Einschränkung $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorph ist und bestimme deren (komplexe) Ableitung. (4)

Hinweis: Verwende Satz 1.30 aus der Vorlesung.

Lösung: Nach der Vorlesung wird $\mathrm{Str}_0 := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ unter der Exponentialabbildung bijektiv auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet. Zudem gilt $(\exp z)' = \exp z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, was man direkt aus der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion ablesen kann (insbesondere ist also auch f' stetig). Aus dem Abbildungsverhalten $\exp z = \exp(\operatorname{Re} z)\exp(i \operatorname{Im} z)$ sieht man, dass $\exp z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Also ist $(\exp z)' \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zudem wurde in der Vorlesung bereits gezeigt, dass exp auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Beachte, dass wir Satz 1.30 aus der Vorlesung nicht auf $\exp : \mathrm{Str}_0 \to \mathbb{C}$ anwenden können, da Str_0 nicht offen ist. Tatsächlich haben wir in der Vorlesung ja auch gesehen, dass der Logarithmus auf $\mathbb{C}^*$ nicht stetig, also insbesondere nicht holomorph ist. Betrachten wir jedoch die Einschränkung von exp auf den offenen Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, so sind alle Voraussetzungen des Satzes 1.30 erfüllt und wir erhalten, dass $\log : \exp(S) \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Aus dem Abbildungsverhalten der Exponentialfunktion sieht man, dass $\exp(S) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Nach der Formel aus dem Skript ist die Ableitung des Logarithmus wie im Reellen

$$\log'(\exp z) = \frac{1}{(\exp z)'} = \frac{1}{\exp z}.$$

Mit der Substitution $\exp z = w$ erhalten wir also $\log'(w) = \frac{1}{w}$.

6. *Die Fréchet-Ableitung.* In dieser Zusatzaufgabe wollen wir noch einmal den Begriff der Fréchet-Ableitung wiederholen. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Vektorräume (über $\mathbb{R}$). Eine Abbildung $f : U \to Y$ ($U \subset X$ offen) heißt *Fréchet-differenzierbar* (oder *total differenzierbar*) in $x_0 \in U$, falls es eine stetige lineare Abbildung $A : X \to Y$ gibt mit

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Man schreibt in diesem Fall $f'(x_0) := A$. Wir wollen in dieser Aufgabe diesen Ableitungsbegriff verinnerlichen.

(a) Sei $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen $n \times n$-Matrizen. Wir versehen diesen mit der *Hilbert-Schmidt-Norm* oder *Frobeniusnorm*: $\|(a_{ij})\|^2 := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$ (also der euklidischen Norm in den Einträgen). Diese erfüllt $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (Submultiplikativität). Zeige, dass

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^2 \end{aligned}$$

in jedem Punkt Fréchet-differenzierbar ist und bestimme die Ableitung von f. (+5)

Lösung: Für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist

$$(A + H)^2 - A^2 = A^2 + AH + HA + H^2 - A^2 = AH + HA + H^2.$$

Der in H lineare Teil der rechten Seite sollte also die Fréchet-Ableitung am Punkt A sein. Wir definieren also die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L_A : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \\ H &\mapsto AH + HA. \end{aligned}$$

Diese ist auch stetig: für $H_n \to H$ (also $\|H_n - H\| \to 0$) bezüglich der Hilbert-Schmidt-Norm gilt nämlich wegen der Submultiplikativität

$$\begin{aligned} \|L_A(H_n) - L_A(H)\| &= \|AH_n + H_nA - AH - HA\| = \|A(H_n - H) + (H_n - H)A\| \\ &\leq 2 \|H_n - H\| \, \|A\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Es bleibt die definierende Eigenschaft nachzuweisen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\|f(A + H) - f(A) - L_A(H)\|}{\|H\|} &= \frac{\left\|A^2 + AH + HA + H^2 - A^2 - AH - HA\right\|}{\|H\|} \\ &= \frac{\left\|H^2\right\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = \|H\| \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Also ist f Fréchet-differenzierbar mit $f'(A) = L_A$.

(b) Wir betrachten nun den normierten Vektorraum $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Dann können wir für eine Fréchet-differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die linearen Abbildungen $f'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ($x \in \mathbb{R}^d$) mit den Abbildungsmatrizen A_x bezüglich der kanonischen Basis identifizieren. Zeige: Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Fréchet-differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ auf $\mathbb{R}^d$ für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ und bezüglich der oberen Identifikation gilt (+5)

$$f'(x) = A_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}.$$

Lösung: Sei e_j der j-te Einheitsvektor. Dann gilt nach der Definition der Fréchet-Ableitung insbesondere, dass für die folgende spezielle Wahl mit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (beachte $\|he_j\|_2 = |h|$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x + he_j) - f(x) - f'(x)he_j\|_2}{|h|} = 0.$$

Beachte, dass für $y = (y_1, \dots, y_d)$ für alle $i = 1, \dots, d$ die Abschätzung $|y_i|^2 \leq \sum_{k=1}^d |y_k|^2 = \|y\|_2^2$ gilt. Also ist auch

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f_i(x + he_j) - f_i(x) - h(f'(x)e_j)_i|}{|h|} = 0.$$

Dies zeigt aber gerade, dass $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ existiert mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = (f'(x)e_j)_i.$$

Für die Abbildungsmatrix A_x bezüglich der kanonischen Basis gilt also

$$A_x = \begin{pmatrix} (f'(x)e_1)_1 & \cdots & (f'(x)e_d)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (f'(x)e_1)_n & \cdots & (f'(x)e_d)_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix},$$

wie in der Aufgabenstellung behauptet.
Bemerkung: Umgekehrt haben wir in Analysis II gelernt: Existieren $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ in einer Umgebung U eines Punktes $x \in \mathbb{R}^d$ und sind diese stetig in U für alle $i, j \in \{1, \dots, d\}$, so ist f Fréchet-differenzierbar in U mit stetiger Ableitung. Die Fréchet-Ableitung ist dann gegeben als

$$f'(x) : \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix} \mapsto A_x(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^d$.