Universität Ulm
Abgabe: Donnerstag, 27.6.2013

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 30

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 2

7. *Über Kurven und Wege.* Sind die folgenden Kurven r_1 und r_2 äquivalent, d.h. sind sie zwei Parametrisierungen für denselben Weg?

(a) $r_1(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $r_2(t) = e^{2it}$ für $t \in [0, \pi]$. (2)

(b) $r_1(t) = e^{-2\pi it}$ für $t \in [0, 1]$ und $r_2(t) = e^{-2\pi it}$ für $t \in [0, 2]$. (2)

8. *Grundlegende Eigenschaften von Kurvenintegralen.* Seien $r_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $r_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ zwei äquivalente stückweise stetig differenzierbare Kurven und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig mit $A \supset r_1([a, b])$. Zeige, dass dann

(a) $\int_a^b f(r_1(t))r_1'(t)\,dt = \int_c^d f(r_2(t))r_2'(t)\,dt.$ (2)

(b) $\int_a^b |r_1'(t)|\,dt = \int_c^d |r_2'(t)|\,dt.$ (2)

Dies zeigt, dass die Länge eines Weges und das Kurvenintegral über einen Weg, wie in der Vorlesung eingeführt, wohldefiniert sind, d.h. unabhängig von der Wahl der Parametrisierung des Weges sind.

Seien nun γ_1 und γ_2 zwei Wege, wobei der Endpunkt von γ_1 mit dem Anfangspunkt von γ_2 übereinstimmt und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig ist mit $\operatorname{Bild}\gamma_1 \cup \operatorname{Bild}\gamma_2 \subset A$. Zeige, dass

(c) $\int_{\overline{\gamma_1}} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$ (2)

(d) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$ (2)

9. Berechne folgende Integrale.

(a) $\int_{|z|=2} |z|\,dz.$ (3)

(b) $\int_{|z|=1} \overline{z}\,dz.$ (3)

(c) $\int_{|z|=5} p(z)\,dz$, wobei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten ist. (3)

(d) $\int_{\gamma_E} \frac{1}{z}\,dz$, wobei γ_E einmal den positiv orientierten Rand einer Ellipse E, für die 0 ein innerer Punkt ist, durchläuft. (3)

Hinweis: $\int_{|z|=r} f(z)\,dz$ ist eine gängige Notation für das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$, wobei γ einmal den positiv orientierten Rand der Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius r durchläuft. Allgemeiner schreibt man $\int_{\partial G} f(z)\,dz$ für ein positiv berandetes Gebiet G.

10. *Ein nützlicher Trick.* In dieser Aufgabe wollen wir anhand einer Aussage aus der Vorlesung einen nützlichen Trick kennenlernen. Mit diesem kann man Aussagen über komplexe Zahlen manchmal durch geschicktes Drehen in der komplexen Ebene auf Aussagen über reelle zurückführen.

Zeige direkt ohne ein Approximationsargument, dass für eine stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ die Abschätzung (3)

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

gilt. Schätze dazu für $s \in \mathbb{R}$ den Realteil von $e^{is} \int_a^b f(t)\,dt$ ab und drehe dann geschickt auf die reelle Achse, um die Behauptung zu zeigen.

11. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Zeige, dass dann f eine Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ besitzt, d.h. eine reell differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Zeige ferner, dass (3)

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Hinweis: Versuche den reellen Fundamentalsatz aus Analysis I für Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ anzuwenden.