Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 35+5

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 3

12. Sei $A_n \subset \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge kompakter nicht-leerer Mengen mit $A_{n+1} \subset A_n$.

(a) Zeige, dass es dann ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. (4)

(b) Zeige, dass die Aussage des obigen Satzes nicht mehr gilt, wenn man nur annimmt, dass die Mengen A_n abgeschlossen sind. (1)

13. *Über Sterngebiete, Elementargebiete, ...*

(a) Gebe ein Beispiel eines Sterngebiets $G \subset \mathbb{C}$, das nicht konvex ist. (2)

(b) Gebe ein Beispiel eines Elementargebiets $G \subset \mathbb{C}$, das kein Sterngebiet ist. (2)

(c) Sei $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \dots$ eine aufsteigende Folge von Elementargebieten. Zeige, dass dann $\cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ auch ein Elementargebiet ist. (3)

Bemerkung: Man kann zeigen, dass man alle Elementargebiete ausgehend von Kreisscheiben mit dieser Operation und Vereinigungen wie in Lemma 3.12 konstruieren kann. Zudem kann man zeigen, dass die Elementargebiete gerade die einfach zusammenhängenden Gebiete (wir verweisen auf Vorlesungen oder Bücher über Topologie) sind.

14. *Berechnen von Kurvenintegralen mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel.* Berechne folgende Kurvenintegrale.

(a) $\int_{|z-2|=1} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\, dz.$ (3)

(b) $\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\, dz.$ (3)

(c) $\int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}\, dz.$ (3)

(d) $\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz.$ (3)

(e) $\int_{|z|=r} \frac{\sin z}{z-b}\, dz$ für $b \in \mathbb{C}, r > 0$ mit $|b| \neq r$. (3)

15. *Funktionentheorie und reelle Integrale.* Funktionentheoretische Methoden helfen oft dabei, Fragestellungen aus der reellen Analysis zu beantworten. Wir wollen hierfür ein erstes Beispiel kennenlernen. Es soll der Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$$

ohne Kenntnis der Stammfunktion ($\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$) berechnet werden.

(a) Für $R > 1$ sei $\gamma_{1,R} = [-R, R]$ und $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$ für $t \in [0, \pi]$. Zeige mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, dass für $\gamma_R := \gamma_{1,R} \cup \gamma_{2,R}$ gilt (5)

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \pi.$$

(b) Zeige, dass $\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\, dz \right| = 0$ und folgere daraus, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$ gilt. (3)

16. *Ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.* In dieser Bonusaufgabe wollen wir einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geben. Sei P ein nicht konstantes komplexes Polynom

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

von Grad n ($a_n \neq 0$). Zeige, dass P eine komplexe Nullstelle besitzt. Nehme dafür an, dass $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Schreibe $P(z) = zQ(z) + a_0$ und zeige, dass (+5)

$$\frac{1}{z} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{zP(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Leite einen Widerspruch her, indem Du beide Seiten über zunehmend große Ursprungskreise integrierst.