Universität Ulm

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler

Abgabe: Donnerstag, 11.7.2013

Sommersemester 2013
Punktzahl: 30

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 4

17. *Potenzreihen.* Bestimme für die folgenden Funktionen f jeweils an den angegebenen Entwicklungspunkten $a \in \mathbb{C}$ die Potenzreihenentwicklung und deren Konvergenzradius.

(a) $f(z) = \exp z$ an $a \in \mathbb{C}$ beliebig. (3)

(b) $f(z) = \frac{1}{z}$ an $a \in \mathbb{C}^*$ beliebig. (3)

(c) $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$ an $a = 0$. (3)

18. *Die Leibnizsche Regel.* Beweise die Leibnizsche Regel aus der Vorlesung:

Es sei $O \subset \mathbb{C}$ offen und $f : [a,b] \times O \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion so, dass $f(t,\cdot)$ für alle $t \in [a,b]$ holomorph ist und $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig ist. Zeige, dass dann

$$g(z) \coloneqq \int_a^b f(t,z)\,dt$$

auf O holomorph ist und für alle $z \in O$ ist (5)

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,dt.$$

19. *Abbildungseigenschaften ganzer Funktionen.* Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze Funktion. Zeige, dass dann das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ liegt. (5)

20. *Die Gamma-Funktion.* Für $\operatorname{Re} z > 0$ definieren wir die Gammafunktion als das uneigentliche Integral

$$\Gamma(z) \coloneqq \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt.$$

(a) Zeige, dass die uneigentlichen Integrale für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ existieren. (3)

(b) Zeige, dass $\Gamma(z)$ auf der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ holomorph ist.
Hinweis: Betrachte dazu die Funktionen $f_n(z) \coloneqq \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t}\,dt$ für $n \in \mathbb{N}$. (5)

(c) Zeige, dass die Gammafunktion für $\operatorname{Re} z > 0$ die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ erfüllt. Folgere daraus, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ gilt. (3)