Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 11.7.2013

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 30

Lösungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 4

17. *Potenzreihen.* Bestimme für die folgenden Funktionen f jeweils an den angegebenen Entwicklungspunkten $a \in \mathbb{C}$ die Potenzreihenentwicklung und deren Konvergenzradius.

(a) $f(z) = \exp z$ an $a \in \mathbb{C}$ beliebig. (3)

Lösung: Mithilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\exp z = \exp(a + (z-a)) = \exp a \exp(z-a) = \exp a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{k!}.$$

Da die Exponentialfunktion ganz ist, folgt aus der Vorlesung, dass die Potenzreihe auf jeder noch so großen Kugel um a konvergiert. Der Konvergenzradius ist also ∞.

(b) $f(z) = \frac{1}{z}$ an $a \in \mathbb{C}^*$ beliebig. (3)

Lösung: Wir erhalten mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + (z-a)} = \frac{1}{a\left(1 + \frac{z-a}{a}\right)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-a}{a}\right)^k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^k} (z-a)^k.$$

Diese geometrische Reihe konvergiert nach Analysis I, wenn $\left|\frac{z-a}{a}\right| < 1$ ist, also falls $|z-a| < |a|$ ist. Für $|z-a| > |a|$ ist die Reihe dagegen divergent. Der Konvergenzradius beträgt als $|a|$. Alternativ sieht man das auch direkt aus der Vorlesung. Da f auf $\mathbb{C}^*$ holomorph ist, folgt aus der Vorlesung direkt, dass der Konvergenzradius mindestens $|a|$ betragen muss. Andererseits kann der Konvergenzradius aber auch nicht größer sein, da $\frac{1}{z}$ in Null eine Singularität besitzt.

(c) $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ an $a = 0$. (3)

Lösung: Eine Faktorisierung des Nenners ergibt $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$. Wir haben also nach einer Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 - 5z + 6} &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}\right) z^k \end{aligned}$$

Da f holomorph auf $B_2(0)$ ist, folgt aus der Vorlesung, dass der Konvergenzradius größer gleich 2 ist. Andererseits kann der Konvergenzradius auch nicht größer sein, da die Funktion im Punkt 2 eine Singularität besitzt.

18. *Die Leibnizsche Regel.* Beweise die Leibnizsche Regel aus der Vorlesung:

Es sei $O \subset \mathbb{C}$ offen und $f : [a,b] \times O \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion so, dass $f(t,\cdot)$ für alle $t \in [a,b]$ holomorph ist und $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig ist. Zeige, dass dann

$$g(z) \coloneqq \int_a^b f(t,z)\,dt$$

auf O holomorph ist und für alle $z \in O$ ist (5)

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z)\, dt.$$

Lösung: Wir führen die Aussage auf den reellen Fall zurück, für den wir die Leibnzische Regel schon aus den Analysis-Vorlesungen kennen. Wir setzen $u(x, y) = \operatorname{Re} g(x + iy)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} g(x + iy)$. Dann ist etwa

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t, x + iy)\, dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re} f(t, x + iy)\, dt.$$

Die Funktion $\operatorname{Re} f(t, x+iy)$ ist stetig und Fréchet-differenzierbar (also insbesondere partiell differenzierbar nach x und y) für festes $t \in [a, b]$ mit stetiger Ableitung. Nach der aus den Analysis-Vorlesungen bekannten Leibnzischen Regel ist also u partiell differenzierbar nach x und y mit

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(t, x + iy)\, dt,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(t, x + iy)\, dt.$$

Mit einem analogen Argument erhält man ebenso Integraldarstellungen für $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$. Da $f(t, \cdot)$ für feste t holomorph ist, hat man für festes t wegen den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen etwa $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(t, x + iy) = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(t, x + iy)$ für alle $(x, y) \in \tilde{O}$. Wendet man diese Identitäten punktweise in den Integralen an, sieht man, dass u und v die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllen. Zudem sind beide Funktionen als Parameterintegrale wie aus Analysis bekannt stetig (hier benützt man die gleichmäßige Stetigkeit von f auf Kompakta). Also ist $\tilde{g}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ stetig partiell differenzierbar, also insbesondere Fréchet-differenzierbar. Nach dem Cauchy-Riemann Kriterium ist also g holomorph mit (für $z = x + iy$)

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(t, x + iy) + i\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(t, x + iy) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z)\, dt.$$

19. *Abbildungseigenschaften ganzer Funktionen.* Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze Funktion. Zeige, dass dann das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ liegt. (5)

Lösung: Angenommen, dass Bild von f wäre nicht dicht. Dann gäbe es einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Kugel $B_r(z_0)$ $(r > 0)$ um z_0 mit $f(z) \notin B_r(z_0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wegen $|f(z) - z_0| \geq r$ für alle $z \in \mathbb{C}$ wäre dann $z \mapsto g(z) := \frac{1}{f(z)-z_0}$ eine ganze Funktion mit $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville wäre dann aber g und damit f konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung.

20. *Die Gamma-Funktion.* Für $\operatorname{Re} z > 0$ definieren wir die Gammafunktion als das uneigentliche Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

(a) Zeige, dass die uneigentlichen Integrale für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ existieren. (3)

Lösung: Für $z \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|t^z| = |\exp(z \log t)| = \exp(\operatorname{Re}(z \log t)) = \exp(\operatorname{Re} z \cdot \log t) = t^{\operatorname{Re} z}.$$

Es gibt ein $M > 0$ so, dass $t^{\operatorname{Re} z - 1} \leq e^{t/2}$ für alle $t \geq M$. Also gilt wegen $e^{-t} \leq 1$ für alle $t \geq 0$

$$\int_0^M \left|t^{z-1} e^{-t}\right| dt \leq \int_0^M t^{\operatorname{Re} z - 1}\, dt = \frac{1}{\operatorname{Re} z} M^{\operatorname{Re} z}.$$

Zudem ist

$$\int_M^\infty \left|t^{z-1}e^{-t}\right| dt \leq \int_M^\infty e^{t/2}e^{-t}\,dt = \int_M^\infty e^{-t/2}\,dt = 2e^{-M/2}.$$

Die absolute Konvergenz der beiden Teilintegrale impliziert gerade, dass das uneigentliche Integral exisitert.

(b) Zeige, dass $\Gamma(z)$ auf der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ holomorph ist.
Hinweis: Betrachte dazu die Funktionen $f_n(z) := \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\,dt$ für $n \in \mathbb{N}$. (5)

Lösung: Die Funktion $(t, z) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ erfüllt die Voraussetzungen der Leibnizischen Regel auf $[\frac{1}{n}, n] \times \mathbb{C}$. Somit sind die Funktionen f_n ganz, also insbesondere holomorph für $\operatorname{Re} z > 0$. Wir zeigen, dass für $\operatorname{Re} z \geq \delta$ für $\delta > 0$ die Funktionen f_n gleichmäßig gegen Γ konvergieren. Daraus folgt, dass Γ als gleichmäßiger Grenzwert holomorpher Funktionen holomorph für $\operatorname{Re} z > 0$ ist. Sei also $\delta > 0$. Dann ist für $\operatorname{Re} z \geq \delta$ und $n \geq M$

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z) - f_n(z)| &= \left|\int_0^{1/n} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int_n^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt\right| \\
&\leq \int_0^{1/n} t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t}\,dt + \int_n^\infty t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t}\,dt \\
&\leq \int_0^{1/n} t^{\operatorname{Re} z-1}\,dt + \int_n^\infty e^{-t/2}\,dt \\
&= \frac{1}{\operatorname{Re} z}\frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} + 2e^{-n/2} \leq \frac{1}{\delta}\frac{1}{n^\delta} + 2e^{-n/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Also ist $z \mapsto \Gamma(z)$ holomorph für $\operatorname{Re} z > 0$.

(c) Zeige, dass die Gammafunktion für $\operatorname{Re} z > 0$ die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ erfüllt. Folgere daraus, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ gilt. (3)

Lösung: Man erhält durch partielle Integration (auftrennen in Real- und Imaginärteil)

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = z\Gamma(z).$$

Möchte man sich um die Gültigkeit der partiellen Integration in dieser Situation keine Gedanken machen, kann man alternativ die Identität nur für reelle Zahlen prüfen und für komplexe Zahlen die Gültigkeit aus dem Identitätssatz schließen. Für $z = 1$ gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1.$$

Mithilfe der Funktionalgleichung folgt

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) = n!.$$