Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 18.7.2013

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 25+5

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 5

21. *Analytische Fortsetzungen.* Seien $G_1 \subset G_2$ Gebiete und $f_1 : G_1 \to \mathbb{C}$, $f_2 : G_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Man nennt f_2 eine *analytische Fortsetzung* von f_1, falls $f_{2|G_1} = f_1$ gilt.

(a) Zeige, dass die analytische Fortsetzung eindeutig ist, d.h. ist $g_2 : G_2 \to \mathbb{C}$ eine zweite analytische Fortsetzung von f_1, so gilt $f_2 = g_2$ auf G_2. (4)

(b) Zeige, dass die komplexe Gammafunktion $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ aus Aufgabe 20 eine eindeutige analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$ besitzt. (6)
Hinweis: Verwende die Funktionalgleichung!

22. *Die Grenzen des Identitätssatzes.* Zeige, dass folgende Version des Identitätssatzes **nicht** gilt: Seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet G. Ferner gebe es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ mit paarweise verschiedenen Elementen und $z_n \to z \in \mathbb{C}$ $(n \to \infty)$ so, dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist bereits $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$. (4)

23. *Noch ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.* Zeige, dass das Bild eines Polynoms abgeschlossen in der komplexen Ebene ist. Folgere daraus den Fundamentalsatz der Algebra! (5)

Hinweis: Studiere das Wachstumsverhalten eines (nicht-konstanten) Polynoms um die Abgeschlossenheit des Bildes zu zeigen.

24. *Ein Problem von V.I. Arnold.* Sei $O \subset \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Umgebung der Null und seien $f, g : O \to \mathbb{C}$ zwei nicht identische holomorphe Funktionen mit $f(0) = g(0) = 0$ und $f'(0) = g'(0) = 1$. Zeige, dass (6)

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - g(z)}{g^{-1}(z) - f^{-1}(z)} = 1.$$

Folgere daraus

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)} = 1.$$

25. *Der Ring der holomorphen Funktionen (Bonusaufgabe).* Sei $\emptyset \neq O \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist die Menge aller auf O holomorpher Funktionen $H(O)$ in natürlicher Weise ein kommutativer Ring mit Eins (sogar eine $\mathbb{C}$-Algebra). Zeige: (+5)

$$H(O) \text{ ist ein Integritätsring} \quad \Leftrightarrow \quad O \text{ ist ein Gebiet.}$$

Wiederholung: Ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring R mit Eins heißt *Integritätsring*, falls für alle $f, g \in R$ gilt:

$$f \cdot g = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \text{ oder } g = 0.$$