Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 18.7.2013

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 25+5

Lösungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 5

21. *Analytische Fortsetzungen.* Seien $G_1 \subset G_2$ Gebiete und $f_1 : G_1 \to \mathbb{C}$, $f_2 : G_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Man nennt f_2 eine *analytische Fortsetzung* von f_1, falls $f_{2|G_1} = f_1$ gilt.

(a) Zeige, dass die analytische Fortsetzung eindeutig ist, d.h. ist $g_2 : G_2 \to \mathbb{C}$ eine zweite analytische Fortsetzung von f_1, so gilt $f_2 = g_2$ auf G_2. (4)

Lösung: Die zwei analytischen Fortsetzungen stimmen auf der offenen Menge G_1 überein, die natürlich einen Häufungspunkt (in G_2) besitzt. Nach dem Identitätssatz gilt also $f_2 = g_2$ auf G_2.

(b) Zeige, dass die komplexe Gammafunktion $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ aus Aufgabe 20 eine eindeutige analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$ besitzt. (6)

Hinweis: Verwende die Funktionalgleichung!

Lösung: Über die Definition aus dem letzten Übungsblatt erhält man eine holomorphe Funktion Γ auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, die die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ auf ihrem Definitionsbereich erfüllt. Umgeformt ergibt sich $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Die rechte Seite ist aber für $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Re} z > -1\}$ definiert und ist somit eine Fortsetzung auf dieses Gebiet, die wir wieder mit Γ bezeichnen. Auf dieser Menge gilt dann wieder die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ nach dem Identitätssatz, da die Gleichung für $\operatorname{Re} z > 0$ stimmt. Man erhält nun über $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ eine Fortsetzung auf $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\} : \operatorname{Re} z > -2\}$. Diese erfüllt nach dem Identitätssatz wieder die Funktionalgleichung und man kann mit der Fortsetzung induktiv fortfahren. Man erhält so eine Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Diese ist eindeutig nach der ersten Teilaufgabe.

22. *Die Grenzen des Identitätssatzes.* Zeige, dass folgende Version des Identitätssatzes **nicht** gilt: Seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet G. Ferner gebe es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ mit paarweise verschiedenen Elementen und $z_n \to z \in \mathbb{C}$ $(n \to \infty)$ so, dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist bereits $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$. (4)

Lösung: Wir wählen $G \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Dann sind die Funktionen $f(z) = \sin\left(\frac{2\pi}{z}\right)$ und $g(z) = 0$ auf G holomorph und offensichtlich nicht identisch. Zudem gilt $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Beachte, dass wir den Identitätssatz aus der Vorlesung nicht anwenden können, da 0 nicht im Definitionsbereich G liegt.

23. *Noch ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.* Zeige, dass das Bild eines Polynoms abgeschlossen in der komplexen Ebene ist. Folgere daraus den Fundamentalsatz der Algebra! (5)

Hinweis: Studiere das Wachstumsverhalten eines (nicht-konstanten) Polynoms um die Abgeschlossenheit des Bildes zu zeigen.

Lösung: Sei P ein Polynom. Wir zeigen zuerst, dass $P(\mathbb{C})$ abgeschlossen ist. Für konstante Polynome ist dies offensichtlich richtig. Sei also P nicht konstant. Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge im Bild von P mit $w_n \to w \in \mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass w auch im Bild von P liegt. Die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und damit beschränkt, also $|w_n| \leq M$ für ein

$M \geq 0$. Nach dem Wachstumsverhalten für nicht-konstante Polynome, das wir bereits in der Vorlesung untersucht haben, gibt es ein $R \geq 0$ so, dass $|P(z)| > M$ für alle $|z| > R$. Also gilt $w_n \in P(\bar{B}_R(0))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\bar{B}_R(0)$ kompakt und P stetig ist, ist auch $P(\bar{B}_R(0))$ kompakt. Es gibt also eine Teilfolge w_{n_k} von w_n mit $w_{n_k} \to w_0$ für ein $w_0 \in P(\bar{B}_R(0))$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt also $w = w_0 \in P(\bar{B}_R(0))$. Also ist das Bild von P abgeschlossen. Ist P nicht-konstant, folgt aus dem Satz über die Gebietstreue zusätzlich, dass das Bild von P auch offen ist. Da das Bild von P offensichtlich nicht leer ist und $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist, folgt $\operatorname{Bild} P = \mathbb{C}$. Insbesondere besitzt also P eine Nullstelle.

24. *Ein Problem von V.I. Arnold.* Sei $O \subset \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Umgebung der Null und seien $f, g : O \to \mathbb{C}$ zwei nicht identische holomorphe Funktionen mit $f(0) = g(0) = 0$ und $f'(0) = g'(0) = 1$. Zeige, dass (6)

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - g(z)}{g^{-1}(z) - f^{-1}(z)} = 1.$$

Folgere daraus

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)} = 1.$$

Lösung: In der ursprünglichen Formulierung der Aufgabe war ein Fehler, da die Annahme $f \neq g$ fehlte. Es reicht auch nicht wie in der Übung vorgestellt (auch nicht für das Beispiel, bei dem sich die Entwicklungen erst in siebter Ordnung unterscheiden) bis zur zweiten Ordnung zu entwickeln. Hier nun der etwas aufwändigere korrekte Beweis.

Da $f'(0) \neq 0$, folgt aus der Vorlesung, dass f^{-1} in einer Nullumgebung holomorph ist, also wieder in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Sei also $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ und $f^{-1}(z) = \sum_{k=0}^\infty A_k z^k$ in einer Nullumgebung. Man sieht sofort, dass $A_0 = 0$ und $A_1 = 1$ aus der Formel für die Ableitung der Umkehrabbildung. Für die Glieder höherer Ordnung betrachten wir die Potenzreihenentwicklung von

$$z = f^{-1}(f(z)) = \sum_{l=0}^\infty A_l \left(\sum_{k=0}^\infty a_k z^k\right)^l$$

Aus der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung folgt durch Vergleichen der Glieder n-ter Ordnung auf beiden Seiten für $n \geq 2$

$$0 = A_n \cdot a_1 + A_1 \cdot a_n + Q_n(a_2, \ldots, a_{n-1}, A_2, \ldots, A_{n-1})$$

für universelle Polynome Q_n. Da $a_1 = 1$ und $A_1 = 1$ gilt, können wir problemlos nach A_n auflösen und wir sehen induktiv, dass wir für universelle Polynome P_n in den Koeffizienten eine Darstellung der Form

$$A_n = -a_n + P_n(a_2, \ldots, a_{n-1})$$

für $n \geq 2$ erhalten.

Sei nun $g(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k z^k$ in einer Nullumgebung. Da $f \neq g$ auf einer zusammenhängenden Menge um die Null gilt, folgt, dass es ein kleinstes n (mit notwendigerweise $n \geq 2$) gibt, dass $a_n \neq b_n$ erfüllt. Für dieses n folgt mit der oberen Darstellung (die ersten $n-1$ Glieder sowohl von f und g als auch von f^{-1} und g^{-1} stimmen wegen der oberen Darstellung überein)

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - g(z)}{g^{-1}(z) - f^{-1}(z)} &= \frac{a_n z^n - b_n z^n + \mathcal{O}(z^{n+1})}{(-b_n + P_n(b_2, \ldots, b_{n-1}))z^n - (-a_n + P_n(a_2, \ldots, a_{n-1}))z^n + \mathcal{O}(z^{n+1})} \\ &= \frac{(a_n - b_n)z^n + \mathcal{O}(z^{n+1})}{(a_n - b_n)z^n + \mathcal{O}(z^{n+1})} \xrightarrow{z\to 0} 1.\end{aligned}$$

Insbesondere können wir $f(z) = \sin(\tan z)$ und $g(z) = \tan(\sin z)$ wählen. Man sieht, dass $f(0) = g(0) = 0$ und $f'(0) = g'(0) = 1$. Also folgt der spezielle Grenzwert aus dem bereits bewiesenen ersten Teil.

25. *Der Ring der holomorphen Funktionen (Bonusaufgabe).* Sei $\emptyset \neq O \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist die Menge aller auf O holomorpher Funktionen $H(O)$ in natürlicher Weise ein kommutativer Ring mit Eins (sogar eine $\mathbb{C}$-Algebra). Zeige: (+5)

$$H(O) \text{ ist ein Integritätsring} \quad \Leftrightarrow \quad O \text{ ist ein Gebiet.}$$

Wiederholung: Ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring R mit Eins heißt *Integritätsring*, falls für alle $f, g \in R$ gilt:

$$f \cdot g = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \text{ oder } g = 0.$$

Lösung: Wir nehmen zuerst an, dass O ein Gebiet ist, also zusätzlich zusammenhängend ist. Wähle eine kompakte Kugel $\bar{B} \subset O$. Ist $f \cdot g = 0$, so folgt, dass für unendlich viele $z \in \bar{B}$ entweder $f(z) = 0$ oder $g(z) = 0$ gilt (ansonsten wäre $\bar{B}$ endlich). Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $N_f := \{z \in \bar{B} : f(z) = 0\}$ unendlich viele Elemente enthält. Wegen der Kompaktheit von $\bar{B}$ besitzt N_f einen Häufungspunkt in $\bar{B}$. Aus dem Identitätssatz folgt somit $f = 0$. Also ist $H(O)$ ein Integritätsring.

Ist O kein Gebiet, so gibt es zwei offene Mengen disjunkte Mengen O_1 und O_2 mit $O_1 \cup O_2 = O$. Dann sind $f(z) = z \cdot \mathbb{1}_{O_1}$ und $g(z) = z \cdot \mathbb{1}_{O_2}$ zwei von Null verschiedene holomorphe Funktionen mit $f \cdot g = 0$. Also ist $H(O)$ kein Integritätsring. Wir haben also durch Kontraposition gezeigt, dass, falls $H(O)$ integer ist, G ein Gebiet ist.