Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: +40

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 6

Dies ist das letzte Übungsblatt. Für die Vorleistung werden 77 Übungspunkte benötigt. Bitte meldet Euch für diese im Hochschulportal an!

26. Bestimme die Laurentreihenentwicklung von $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ in i und bestimme den größten Kreisring mit Mittelpunkt i in dessen Inneren die Entwicklung konvergiert. (+4)

27. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $f : G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer Polstelle in a. Man sagt, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f in a eine Polstelle k-ter Ordnung besitzt, falls k das kleinste $m \in \mathbb{N}$ ist so, dass

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \qquad \text{existiert.}$$

Zeige: Besitzt f in a eine Polstelle erster Ordnung, so gilt für das Residuum in a (+4)

$$\operatorname{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

28. Bestimme für die folgenden Funktionen f jeweils

- die Lage aller isolierten Singularitäten,
- die Residuen in allen isolierten Singularitäten und
- den Wert von $\int_{|z|=\frac{5}{2}} f(z)\, dz$.

(a) $f(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2+1}$. (+6)

(b) $f(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$. (+6)

(c) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. (+6)

29. *Der Residuensatz & reelle Integrale.* Berechne mit Hilfe des Residuensatzes (+6)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx.$$

30. *Fixpunkte holomorpher Funktionen in der Einheitskreisscheibe.* Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene. Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(w) = w$ für $0 \neq w \in \mathbb{E}$. Zeige, dass dann $f(z) = z$ gilt. (+8)

Hinweis: Versuche das Maximumsprinzip auf eine geeignete Funktion anzuwenden!