Universität Ulm

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler

Abgabe: Siehe Vorlesungsseite!

Sommersemester 2013
Punktzahl: +40

Lösungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 6

Dies ist das letzte Übungsblatt. Für die Vorleistung werden 77 Übungspunkte benötigt. Bitte meldet Euch für diese im Hochschulportal an!

26. Bestimme die Laurentreihenentwicklung von $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ in i und bestimme den größten Kreisring $K_{0,R}(i)$ in dessen Inneren die Entwicklung konvergiert. (+4)

Lösung: Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung sieht man

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right).$$

Der erste Term in der Klammer ist bereits von der richtigen Gestalt. Für den zweiten Term erhalten wir

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i+z-i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^k = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i(z-i)}{2}\right)^k.$$

Für die Laurentreihenentwicklung folgt also $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m$ mit

$$a_m = \begin{cases} \frac{i^{m-1}}{2^{m+2}} & m \ge 0, \\ \frac{1}{2} & m = -1, \\ 0 & m \le -2. \end{cases}$$

Die Laurentreihenentwicklung konvergiert für $\left|\frac{z-i}{2}\right| < 1$ und divergiert für $\left|\frac{z-i}{2}\right| > 1$ (geometrische Reihe!). Also ist der größte Kreisring der Form $K_{0,R}(i)$, in dessen Inneren die Laurentreihenentwicklung konvergiert, gerade $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 2\} = K_{0,2}(i)$.

27. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $f : G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer Polstelle in a. Man sagt, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f in a eine Polstelle k-ter Ordnung besitzt, falls k das kleinste $m \in \mathbb{N}$ ist so, dass

$$\lim_{z \to a}(z-a)^m f(z) \qquad \text{existiert.}$$

Zeige: Besitzt f in a eine Polstelle erster Ordnung, so gilt für das Residuum in a (+4)

$$\operatorname{Res}(f; a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z).$$

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir f in einer punktierten Kreisscheibe um a in eine Laurentreihe $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-a)^m$ entwickeln können. Zudem haben wir gesehen, dass f in a genau dann einen Pol besitzt, wenn mindestens ein a_m und höchstens endlich viele a_m für negative $m \in \mathbb{Z}$ ungleich Null sind (dies ist gerade eine Umformulierung von Amerkung 6.4 auf den Folien). Man sieht dann, dass f in a genau dann einen Pol erster Ordnung besitzt, wenn $a_{-1} \neq 0$ und $a_m = 0$ für alle $m \le -2$ ist. Die Laurentreihenentwicklung ist also in einer punktierten Kreisscheibe um a von der Form

$$f(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} a_m (z-a)^m.$$

Nach der Definition des Residuums gilt gerade $\operatorname{Res}(f;a) = a_{-1}$. Wir sehen nun, dass

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\sum_{m=-1}^{\infty} a_m(z-a)^{m+1} = a_{-1}.$$

Dies ist gerade die Behauptung. Mit derselben Idee kann man auch Formeln für Residuen bei Polen höherer Ordnung herleiten. Diese findet man auf Wikipedia oder in jedem Buch über Funktionentheorie.

28. Bestimme für die folgenden Funktionen f jeweils

- die Lage aller isolierten Singularitäten,
- die Residuen in allen isolierten Singularitäten und
- den Wert von $\int_{|z|=\frac{5}{2}} f(z)\,dz$.

(a) $f(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2+1}$. (+6)

Lösung: Die Funktion besitzt isolierte Singularitäten in i und $-i$. Dies sind jeweils Polstellen erster Ordnung, da die Nullstellen im Nenner erster Ordnung sind. Nach der vorherigen Aufgabe gilt für die Residuen

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;i) &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\exp(iz)}{(z+i)(z-i)} = \frac{\exp(i^2)}{2i} = \frac{1}{2ie}\\ \operatorname{Res}(f;-i) &= \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{\exp(iz)}{(z+i)(z-i)} = -\frac{\exp(-i^2)}{2i} = -\frac{e}{2i}.\end{aligned}$$

Beide Singularitäten liegen innerhalb des vom Integrationsweges berandeten Gebietes. Nach dem Residuensatz gilt also

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} f(z)\,dz = \pi(e^{-1}-e).$$

(b) $f(z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$. (+6)

Lösung: Die Funktion besitzt isolierte Singularitäten in allen ganzen Zahlen (man überlegt sich dazu, dass der komplexe Sinus nur Nullstellen auf der reellen Achse besitzt). Zudem sind die Nullstellen erster Ordnung: Wegen der Periodizität reicht es sich den Wert $z=0$ anzuschauen. Für diesen folgt die Aussage aber aus der bekannten Reihenentwicklung. Die Funktion f besitzt also an allen ganzen Zahlen Pole erster Ordnung. Für die Residuen folgt damit mit der letzten Aufgabe für $m\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;m) &= \lim_{z\to m}(z-m)\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cos(\pi m)\frac{1}{\lim_{z\to m}\frac{\sin(\pi z)-\sin(\pi m)}{z-m}}\\ &= \pi\cos(\pi m)(\pi\cos(\pi m))^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Die Singularitäten liegen für $z\in\{-2,\dots,2\}$ in dem vom Integrationsweg berandeten Gebiet. Nach dem Residuensatz gilt also

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} f(z)\,dz = 10\pi i.$$

(c) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. (+6)

Lösung: Eine Faktorisierung des Nenners zeigt

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}.$$

Wir könnten nun eine Verallgemeinerung der obigen Formel für Pole erster Ordnung verwenden, um die Residuen zu berechnen (wir haben hier Pole dritter Ordnung). Wir bestimmen jedoch die Laurentreihe direkt. Beachte dazu, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-w} &= \sum_{k=0}^{\infty} w^k, \\
\frac{1}{(1-w)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} k w^{k-1}, \\
\frac{1}{(1-w)^3} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) w^{k-2}.
\end{aligned}$$

So erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3} = \frac{1}{(z-i)^3}\frac{1}{(z-i+2i)^3} = \frac{1}{(z-i)^3}\frac{1}{(2i)^3}\frac{1}{(1+\frac{z-i}{2i})^3} \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\frac{1}{(z-i)^3}\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^{k-2}
\end{aligned}$$

Für $k = 4$ in der oberen Summe erhalten wir das Reihenglied, das für das Residuum entscheidend ist, also ist

$$\operatorname{Res}(f;i) = \frac{1}{(2i)^3}\frac{1}{2}4\cdot 3\left(\frac{1}{2i}\right)^2 = \frac{12}{2^6 i^5} = \frac{3}{16i}.$$

Genauso können wir für das Residuum in $-i$ vorgehen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3} = \frac{1}{(z+i)^3}\frac{1}{(z+i-2i)^3} = \frac{1}{(z+i)^3}\frac{1}{(-2i)^3}\frac{1}{(1-\frac{z+i}{2i})^3} \\
&= -\frac{1}{(z+i)^3}\frac{1}{(2i)^3}\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{z+i}{2i}\right)^{k-2}
\end{aligned}$$

Analog zu oben erhalten wir so für das Residuum

$$\operatorname{Res}(f;-i) = -\frac{1}{(2i)^3}\frac{1}{2}4\cdot 3\left(\frac{1}{2i}\right)^2 = -\frac{3}{16i}.$$

Beide isolierten Singularitäten liegen in dem vom Integrationsweg berandeteten Gebiet. Wir haben also nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{3}{16i} - \frac{3}{16i}\right) = 0.$$

29. *Der Residuensatz & reelle Integrale.* Berechne mit Hilfe des Residuensatzes (+6)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx.$$

Lösung: Wir setzen wie bereits früher für $R > 1$ die Wege $\gamma_{1,R} \coloneqq [-R,R]$, $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$ für $t \in [0,\pi]$ und $\gamma_R = \gamma_{1,R} \cup \gamma_{2,R}$. Das Wegintegral

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

können wir mit Hilfe des Residuensatzes berechnen. Dazu stellen wir fest, dass genau $\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ und $\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ die einfachen Nullstellen des Nenners des Integranden in der oberen komplexen Halbebene sind (die beiden verbleibenden vierten Einheitswurzeln bezeichnen wir wie immer mit ζ_3 und ζ_4). Für die Residuen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;\zeta_1) &= \lim_{z\to\zeta_1}(z-\zeta_1)\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_3)(\zeta_1-\zeta_4)} = 2\sqrt{2}\frac{1}{2(2+2i)2i} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{i(1+i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{i-1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i); \\
\operatorname{Res}(f;\zeta_2) &= \lim_{z\to\zeta_2}(z-\zeta_2)\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_3)(\zeta_2-\zeta_4)} = 2\sqrt{2}\frac{1}{(-2)2i(2i-2)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{i(1-i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{i+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i).
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz gilt also für $R > 1$

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^4}\,dz = 2\pi i\frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i+1-i) = -4\pi i^2\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Beachte, dass für $R > 1$ die Abschätzung $\left|1+z^4\right| \geq |z|^4 - 1$ gilt. Insbesondere haben wir also nach der Standard-/ Fundamentalabschätzung

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}}\frac{1}{1+z^4}\,dz\right| \leq \pi R\frac{1}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Demnach erhalten wir

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_{2,R}}\frac{1}{1+z^4}\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{1}{1+z^4}\,dz\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+z^4}\,dz.$$

Aus der Symmetrie des Integranden folgt nun

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

30. *Fixpunkte holomorpher Funktionen in der Einheitskreisscheibe.* Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene. Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(w) = w$ für $0 \neq w \in \mathbb{E}$. Zeige, dass dann $f(z) = z$ gilt. (+8)

Hinweis: Versuche das Maximumsprinzip auf eine geeignete Funktion anzuwenden!

Lösung: Nach Voraussetzung gilt $f(0) = 0$. Wir können also $f(z) = zg(z)$ für eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ schreiben (dies sieht man sofort aus der Potenzreihenentwicklung von f in der Null). Insbesondere folgt daraus, dass g eine holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ auf $\mathbb{E}$ ist. Nach dem Maximumsprinzip gilt also $|g(z)| \leq r^{-1}$ für alle $|z| \leq r$ für alle $r \in (0,1)$. Insbesondere gilt also $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wir stellen fest, dass jedoch $g(w) = 1$ gilt. Also ist z_1 eine lokale Maximumsstelle von $|g|$. Aus dem Maximumsprinzip folgt hieraus, dass $g(z) = g(w) = 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Hieraus folgt $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Hieraus folgt direkt $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.