Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 120+30

UNIVERSITÄT ULM

Mittwoch, 7.8.2013

Klausur Elemente der Funktionentheorie

1. Die Funktion $f(z) = z^2$ ist auf $\mathbb{C}$ holomorph. Zeige dies

(a) direkt mit der Definition. (10)

(b) mit dem Kriterium über die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen. (10)

2. Berechne die folgenden Kurvenintegrale. Gib dabei jeweils an, welche Sätze aus der Vorlesung verwendet werden.

(a) $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2}\, dz$. (10)

(b) $\int_{|z-5|=2} \log z\, dz$. (10)

(c) $\int_{|z|=4} \bar{z}\, dz$. (10)

3. Bestimme folgende Kurvenintegrale mit Hilfe des Residuensatzes.

(a) $\int_{|z|=1} \cos(1/z)\, dz$. (10)

(b) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \Gamma(z)\, dz$, wobei Γ die analytische Fortsetzung der Gamma-Funktion aus den Übungen ist. (+10)

4. Formuliere und beweise den Satz von Liouville. (20)

5. Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ zwei Gebiete und $f : G_1 \to \mathbb{C}$ sowie $g : G_2 \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $f(G_1) \subset G_2$. Zeige oder widerlege: Ist f nicht konstant und (20)

$$g(f(z)) = 0 \qquad \text{für alle } z \in G_1,$$

so gilt $g(z) = 0$ für alle $z \in G_2$.

6. Entscheide, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind und kreuze die Antwort auf dem Bogen deutlich an. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. (20+20)

1. Die Funktion $z \mapsto \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Der offene Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ für $R > r > 0$ ist ein Elementargebiet, falls $\frac{R}{r} > \frac{\pi}{4}$.
3. Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt auf $\mathbb{C} \setminus \{ix : x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ eine Stammfunktion.
4. Es gilt $\log(-1-i) = \log_{\mathbb{R}} \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.
5. Jedes nicht-konstante Polynom $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.
6. Die Funktion $z \mapsto |z|^2$ ist in 0 komplex differenzierbar.
7. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bijektiv so, dass $f(O) \subset \mathbb{C}$ offen ist für alle $O \subset G$ offen. Dann ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.
8. Sei f ein Zweig des komplexen Logarithmus. Dann gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$ auf dem gesamten Definitionsbereich von f.

9. Es gilt $z_n \to z$ in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$ in $\mathbb{R}$.
10. Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen und $f : O \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f'' : O \to \mathbb{C}$ holomorph.
11. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze Funktion so, dass $f(\mathbb{C})$ abgeschlossen ist. Dann ist f surjektiv.
12. Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ holomorph und γ ein Weg in O. Dann gilt $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,dz$.
13. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so gilt $f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
14. Jede nicht-konstante ganze Funktion besitzt mindestens eine Nullstelle.
15. Der komplexe Kosinus Hyperbolicus $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ $(z \in \mathbb{C})$ besitzt keine Nullstellen.
16. Ist $f : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f bereits konstant.
17. Es gilt $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.
18. Die Funktion $z \mapsto \int_0^1 \cos(zt) \sin t\,dt$ ist ganz.
19. Holomorphe Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft.
20. Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt die Laurentreihenentwicklung von f in einer hinreichend kleinen Nullumgebung nur endlich viele nicht-verschwindende Glieder, so besitzt f in 0 einen Pol.