Universität Ulm

Mittwoch, 7.8.2013

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 120+30

Lösungen zur Klausur Elemente der Funktionentheorie

1. Die Funktion $f(z) = z^2$ ist auf $\mathbb{C}$ holomorph. Zeige dies

(a) direkt mit der Definition. (10)

Lösung: Für $z \in \mathbb{C}$ erhalten wir für den Differenzenquotienten

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{2zh + h^2}{h} = 2z + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2z.$$

Also ist f holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = 2z$.

(b) mit dem Kriterium über die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen. (10)

Lösung: Wir schreiben $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Dann ist $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy$. Diese Funktionen sind offensichtlich stetig partiell differenzierbar. Wir erhalten nun für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -2y.$$

Da u und v stetig partiell differenzierbar sind, ist insbesondere die Funktion $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ Fréchet-differenzierbar. Da wir zusätzlich die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen nachgerechnet haben, folgt mit dem Cauchy-Riemann Kriterium, dass f holomorph ist.

2. Berechne die folgenden Kurvenintegrale. Gib dabei jeweils an, welche Sätze aus der Vorlesung verwendet werden.

(a) $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2}\, dz$. (10)

Lösung: Wir können die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz} e^z_{|z=0} = 2\pi i.$$

(b) $\int_{|z-5|=2} \log z\, dz$. (10)

Lösung: Der Integrand ist holomorph in einer Umgebung des vom Integrationsweg berandeten Gebiets, da der Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorph ist. Nach dem Cauchyschen Integralsatz (für Sterngebiete) ist das Integral also Null.

(c) $\int_{|z|=4} \bar{z}\, dz$. (10)

Lösung: Beachte, dass der Integrand nicht holomorph ist. Wir können also nicht die Cauchyschen Integralsätze direkt anwenden. Wegen $z\bar{z} = |z|^2 = 16$ auf dem Integrationsweg erhalten wir aber dennoch

$$\int_{|z|=4} \bar{z}\, dz = \int_{|z|=4} \frac{16}{z}\, dz = 32\pi i$$

mit der Cauchyschen Integralformel.

3. Bestimme folgende Kurvenintegrale mit Hilfe des Residuensatzes.

(a) $\int_{|z|=1} \cos(1/z)\, dz$. (10)

Lösung: Der Integrand besitzt offenbar eine isolierte Singularität in der Null und ist auf der punktierten komplexen Ebene holomorph. Wir berechnen das Residuum in der Null mit Hilfe der Laurentreihenentwicklung des Integranden um die Null. Mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung für den Kosinus sieht man, dass

$$\cos(1/z) = 1 + \text{Terme in } \frac{1}{z^2} \text{ oder höher.}$$

Insbesondere folgt direkt aus der Definition des Residuums, dass $\operatorname{Res}(\cos(1/z); 0) = 0$. Somit folgt aus dem Residuensatz direkt

$$\int_{|z|=1} \cos(1/z)\, dz = 0.$$

(b) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \Gamma(z)\, dz$, wobei Γ die analytische Fortsetzung der Gamma-Funktion aus den Übungen ist. (+10)

Lösung: Wir haben in den Übungen gesehen, dass wir die Gammafunktion holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ fortsetzen können. Diese Fortsetzung besitzt also innerhalb des vom Integrationsweges berandeten Gebiets genau eine isolierte Singularität, und zwar in der Null. Beachte, dass aufgrund der Funktionalgleichung auf dem Defintionsbereich die Darstellung $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ gilt. Mit der Formel aus den Übungen für das Residuum erhalten wir also

$$\operatorname{Res}(\Gamma, 0) = \lim_{z \to 0} z\Gamma z = \lim_{z \to 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1.$$

Nach dem Residuensatz gilt also

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \Gamma(z)\, dz = 2\pi i.$$

4. Formuliere und beweise den Satz von Liouville. (20)

Lösung: Der Satz von Liouville besagt, dass eine beschränkte ganze Funktion bereits konstant ist. Zur Erinnerung: Eine ganze Funktion ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Man kann erhält den Satz von Liouville als Konsequenz der Cauchyschen Integralformel. Denn für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $|f(w)| \leq M$ für alle $w \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt nach diesem für alle $R > 0$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw.$$

Mit Hilfe der Standardabschätzung erhält man also für alle $R > 0$

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R}.$$

Da R beliebig ist, kann das aber nur für $f'(z) = 0$ stimmen. Dann ist f aber konstant.

5. Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ zwei Gebiete und $f : G_1 \to \mathbb{C}$ sowie $g : G_2 \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $f(G_1) \subset G_2$. Zeige oder widerlege: Ist f nicht konstant und (20)

$$g(f(z)) = 0 \qquad \text{für alle } z \in G_1,$$

so gilt $g(z) = 0$ für alle $z \in G_2$.

Lösung: Die Aussage ist wahr. Ist f nicht konstant, so folgt aus dem Satz über die Gebietstreue, dass $f(G_1)$ eine offene Menge enthält, also gibt es eine abgeschlossene Kugel $\bar{B}$ (mit nicht-leerem Inneren) mit $\bar{B} \subset f(G_1)$. Die Menge $\bar{B}$ besitzt aber einen Häufungspunkt in G_2 und es gilt $g(\bar{B}) = \{0\}$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen angewendet auf g folgt dann aber, dass $g(z) = 0$ für alle $z \in G_2$, was die Behauptung zeigt.

6. Entscheide, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind und kreuze die Antwort auf dem Bogen deutlich an. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. (20+20)

1. Die Funktion $z \mapsto \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   Lösung: Wahr: Es gilt $\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$ für alle $z \neq 0$. Also ist die Funktion holomorph.
2. Der offene Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ für $R > r > 0$ ist ein Elementargebiet, falls $\frac{R}{r} > \frac{\pi}{4}$.

   Lösung: Falsch: In diesem Fall müsste das Integral $\int_{|z|=\frac{r+R}{2}} \frac{1}{z}\, dz$ verschwinden, der Wert ist aber $2\pi i$. Also kann $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf diesem Gebiet keine Stammfunktion besitzen.
3. Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt auf $\mathbb{C} \setminus \{ix : x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ eine Stammfunktion.

   Lösung: Wahr: Die Aussage folgt aus einem Satz aus der Vorlesung, der die Existenz von Stammfunktionen auf Sterngebieten wie in unserem Beispiel garantiert.
4. Es gilt $\log(-1-i) = \log_{\mathbb{R}} \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.

   Lösung: Falsch: Tatsächlich ist $\log(-1-i) = \log_{\mathbb{R}} \sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$.
5. Jedes nicht-konstante Polynom $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.

   Lösung: Wahr: Nach dem Fundamentalsatz besitzt $p(z) - w$ für jedes nicht konstante Polynom p und jedes $w \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle z_0, für die dann $p(z_0) = w$ gilt.
6. Die Funktion $z \mapsto |z|^2$ ist in 0 komplex differenzierbar.

   Lösung: Wahr: Denn für den Differenzenquotient gilt
   $$\lim_{h \to 0} \frac{|h|^2 - |0|^2}{h} = \frac{|h|^2}{h} = \bar{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$
7. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bijektiv so, dass $f(O) \subset \mathbb{C}$ offen ist für alle $O \subset G$ offen. Dann ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

   Lösung: Falsch: $z \mapsto \bar{z}$ ist ein Gegenbeispiel.
8. Sei f ein Zweig des komplexen Logarithmus. Dann gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$ auf dem gesamten Definitionsbereich von f.

   Lösung: Wahr: Das folgt aus der Formel für die Ableitung von Umkehrfunktionen aus der Vorlesung.
9. Es gilt $z_n \to z$ in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$ in $\mathbb{R}$.

   Lösung: Wahr: Das folgt direkt aus der Definition $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
10. Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen und $f : O \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f'' : O \to \mathbb{C}$ holomorph.

    Lösung: Wahr: Eine der Kernaussagen der Vorlesung, besagt, dass die Holomorphie von f die Holomorphie von f' impliziert. Wendet man diese Aussage zweimal an, so erhält man die obenstehende Behauptung.
11. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze Funktion so, dass $f(\mathbb{C})$ abgeschlossen ist. Dann ist f surjektiv.

    Lösung: Wahr: Nach dem Satz über die Gebietstrue ist $f(\mathbb{C})$ offen. Da $f(\mathbb{C})$ nach Voraussetzung auch abgeschlossen ist, muss $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ gelten, da das Bild offensichtlich nicht leer ist.

12. Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ holomorph und γ ein Weg in O. Dann gilt $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,dz$.

    Lösung: Falsch: Integriert man $z \mapsto \frac{1}{z}$ über den Rand der Einheitskreisscheibe, so ist die linke Seite 2π und die rechte 0.

13. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so gilt $f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    Lösung: Wahr: Das war eine Aussage aus der Vorlesung und folgt direkt, wenn man im Differenzenquotienten nur reelle h betrachtet.

14. Jede nicht-konstante ganze Funktion besitzt mindestens eine Nullstelle.

    Lösung: Falsch: Wegen $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ besitzt die komplexe Exponentialfunktion keine Nullstelle.

15. Der komplexe Kosinus Hyperbolicus $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ $(z \in \mathbb{C})$ besitzt keine Nullstellen.

    Lösung: Falsch: Es gilt $\cosh\left(i\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

16. Ist $f : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f bereits konstant.

    Lösung: Falsch: Für die Funktion $z \mapsto e^{-z}$ gilt $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \leq 1$ für z mit $\operatorname{Re} z > 0$.

17. Es gilt $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

    Lösung: Wahr: Diese Identität erhält man, wenn man den Imaginärteil auf beiden Seiten von $e^{i(z+w)} = e^{iz}e^{iw}$ betrachtet.

18. Die Funktion $z \mapsto \int_0^1 \cos(zt) \sin t\,dt$ ist ganz.

    Lösung: Wahr: Das folgt aus der Leibnizschen Regel aus der Vorlesung.

19. Holomorphe Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft.

    Lösung: Wahr: Das war ein Satz aus der Vorlesung.

20. Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt die Laurentreihenentwicklung von f in einer hinreichend kleinen Nullumgebung nur endlich viele nicht-verschwindende Glieder, so besitzt f in 0 einen Pol.

    Lösung: Falsch: $f(z) = 0$ ist ein Gegenbeispiel. In diesem Fall könnte die Singularität auch hebbar sein!