Themenvorschläge Seminar zu Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

Stephan Fackler & Kedar Ranade

17. Juni 2015

Die untenstehenden Themenvorschläge dienen zur Orientierung. Es können auch eigene Themen vorgeschlagen werden. Als Inspiration können die Referenzen unten dienen. Die Vorschläge haben einen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad und Schwerpunkt und sollten nach den eigenen Interessen gewählt werden. Vor der Wahl eines Themas bitte Kontakt mit uns aufnehmen!

(V1) *Die Algebraische Formulierung der Quantenmechanik*
In diesem Vortrag soll der Zugang zur Quantenmechanik über C^*-Algebren und deren Zustände vorgestellt werden. Als zentrales Resultat soll die GNS-Konstruktion besprochen werden (Referenz: [Mor13, Kapitel 14]).

(V2) *Der Beweis des Stone–von–Neumann Theorems*
In diesem Vortrag soll der Beweis des Stone–von–Neumann Theorems ausführlicher anhand der Skizze aus der Vorlesung gegeben werden (Referenz: [Hal13, Kapitel 14]).

(V3) *Gegenbeispiele*
In diesem Vortrag soll gezeigt werden, dass $-\Delta + x^4$ mit Definitionsbereich $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ nicht wesentlich selbstadjungiert ist (Referenz: [Hal13, Abschnitt 9.10]). Falls die Zeit reicht, können weitere Gegenbeispiele aus [Hal13] vorgestellt werden.

(V4) *Nelsons Kriterium*
In diesem Vortrag soll Nelsons Kriterium für wesentliche Selbstadjungiertheit bewiesen werden, das in der Vorlesung nur vorgestellt wird (Referenz: [Mor13, Abschnitt 5.4.3]).

(V5) *Kato Kriterien für Selbstadjungiertheit*
In diesem Vortrag sollen ergänzend zur Vorlesung weitere Kriterien vorgestellt werden, die die (wesentliche) Selbstadjungiertheit von Operatoren der Form $-\Delta + V$ garantieren (Referenz: [RS75]).

(V6) *Der Messprozess in der klassischen Mechanik*
In diesem Vortrag soll eine Einführung in die klassische Hamiltonsche Mechanik gegeben werden und Observablen und gemischte Zustände in diesem Kontext eingeführt werden. Der Messprozess in der klassischen Mechanik soll anschließend dem Messprozess in der Quantenmechanik gegenübergestellt werden (Referenz: [Tak08, Kapitel 1, Abschnitt 2.8] und [Mor13, Abschnitt 7.2]).

(V7) *Quantensymmetrien*
In diesem Vortrag sollen Quantensymmetrien eingeführt werden und einige grundlegende Resultate über solche Symmetrien vorgestellt werden (Referenz: [Mor13, Kapitel 12]).

(V8) *Spindarstellungen*
In diesem Vortrag soll eine kurze Einführung in die Darstellungstheorie (lokal-)kompakter Gruppen gegeben werden und anschließend die Spindarstellungen als zentrales Beispiel in der Quantenmechanik diskutiert werden (Referenz: alle Lehrbücher in der Literaturliste, insbesondere [Hal13, Kapitel 17]).

(V9) *Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte beschränkte Operatoren*
In diesem Vortrag soll der Beweis dieses Satzes vorgestellt werden, je nach Wahl über einen elementaren Zugang oder über die Theorie der C^*-Algebren (Referenz: die meisten Lehrbücher über Funktionalanalysis oder C^*-Algebren, etwa [Wer00] oder [Mur90]).

(V10) *Trotter–Kato Formel*
In diesem Vortrag soll die Trotter–Kato Formel vorgestellt werden und der Zusammenhang zu Pfadintegralen diskutiert werden (Referenzen: [Hal13, Abschnitte 20.1 und 20.2] oder [Tes09, Abschnitt 5.3]).

(V11) *Feynman–Kac Formel*
In diesem Vortrag soll das Wiener-Maß eingeführt werden und über die Feynman–Kac Formel ein Bezug zum Pfadintegral in der Quantenmechanik hergestellt werden (Referenz: [Hal13, Abschnitte 20.3–20.5]).

(V12) *Entropische Unschärferelationen und der Satz von Riesz–Thorin*
In diesem Vortrag soll ein Beispiel gezeigt werden, wie aus einem mathematischen Satz (dem Satz von Riesz–Thorin) eine physikalische Unschärferelation für Entropien folgt (Referenz: Lehrbücher über Funktionalanalysis und [MU88]).

(V13) *Schmidt-Zerlegung und Schmidt-Klassen*
In diesem Vortrag soll der Begriff der k-Positivität und der vollständigen Positivität betrachtet werden und auf den Jamiołkowksi-Isomorphismus eingegangen werden, der einen Zusammenhang u.a. zur positiven Definitheit von Matrizen herstellt (Referenzen: [dP67], [Jam72], [RA] u.a.).

(V14) *Operatorordnung und Phasenraumfunktionen*
In diesem Vortrag soll der Zugang zur Quantenmechanik über Phasenraumfunktionen (z.B. Wignerfunktion, P- und Q-Funktion) vorgestellt werden. Dazu soll auf die

Bedeutung der Operatorordnung eingegangen werden (Referenzen: [Pur01], [Sch01] u.a.).

(V15) *Komplementarität und paarweise komplementäre Basen*
In diesem Vortrag soll der Begriff der komplementären Basen (engl. MUBs) für endlichdimensionale Systeme betrachtet werden. Hier treten Zusammenhänge zwischen quantenphysikalischen Fragen und der Theorie endlicher Körper auf (Referenzen: [KR] u.a.).

Literatur

[dP67] John de Pillis, *Linear transformations which preserve hermitian and positive semidefinite operators*, Pacific J. Math. **23** (1967), 129–137. MR 0222101 (36 #5153)

[Hal13] Brian C. Hall, *Quantum theory for mathematicians*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 267, Springer, New York, 2013. MR 3112817

[Jam72] A. Jamiołkowski, *Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators*, Rep. Mathematical Phys. **3** (1972), no. 4, 275–278. MR 0342537 (49 #7283)

[KR] Andreas Klappenecker and Martin Roetteler, *Constructions of mutually unbiased bases*, arXiv: quant-ph/0309120.

[Mor13] Valter Moretti, *Spectral theory and quantum mechanics*, Unitext, vol. 64, Springer, Milan, 2013, With an introduction to the algebraic formulation, La Matematica per il 3+2. MR 3026533

[MU88] Hans Maassen and Jos B.M. Uffink, *Generalized entropic uncertainty relations*, Physical Review Letters **60** (1988), no. 12, 1103.

[Mur90] Gerard J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990. MR 1074574 (91m:46084)

[Pur01] Ravinder R. Puri, *Mathematical methods of quantum optics*, Springer Series in Optical Sciences, vol. 79, Springer-Verlag, Berlin, 2001. MR 1844379 (2002j:81295)

[RA] Kedar S. Ranade and Mazhar Ali, *The jamiołkowski isomorphism and a conceptionally simple proof for the correspondence between vectors having schmidt number k and k-positive maps*, arXiv: quant-ph/0702255.

[RS75] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. MR 0493420 (58 #12429b)

[Sch01] Wolfgang Schleich, *Quantum optics in phase space*, 1 ed., Wiley-VCH, 2001.

[Tak08] Leon A. Takhtajan, *Quantum mechanics for mathematicians*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 95, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. MR 2433906 (2010c:81003)

[Tes09] Gerald Teschl, *Mathematical methods in quantum mechanics*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, With applications to Schrödinger operators. MR 2499016 (2010h:81002)

[Wer00] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, extended ed., Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR 1787146 (2001i:46001)