Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 7.11.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 4

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 2

3. (a) Zeige, dass für $d \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Abbildung (1)

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{d\times d} \\ t &\mapsto e^{tA} \end{aligned}$$

differenzierbar ist und bestimme deren Ableitung. Hierbei betrachten wir $\mathbb{R}^{d\times d}$ mit der Operatornorm als normierten Vektorraum.

(b) Zeige direkt mit der Definition, dass für zwei differenzierbare Funktionen $v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ auch die Produktabbildung $t \mapsto v(t)w(t)$ differenzierbar ist und bestimme deren Ableitung. (1)

Schreibe dazu die Matrixprodukte *nicht* in die einzelnen Komponenten aus!

4. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass für zwei kommutierende Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Exponentialgleichung (1)

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

gilt. Zeige dies, indem Du den Existenz- und Eindeutigkeitssatz geschickt auf die Gleichung $\dot{y}(t) = (A+B)y(t)$ anwendest.

5. Untersuche, ob jede globale Lösung der folgenden Differenzialgleichungen in einer beschränkten Menge bleibt. (1)

(a) $$\begin{cases} \dot{y}_1(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -3y_1(t) - 4y_2(t) \end{cases}.$$

(b) $$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$