UNIVERSITÄT ULM

Besprechung: Donnerstag, 14.11.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 5

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 3

6. *Differenzielle Form des Lemmas von Gronwall und eine Anwendung.*

(a) Sei $B : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner sei $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar und erfülle die Differenzialungleichung (1)

$$\dot{u}(t) \leq B(t)u(t)$$

für alle $t \in [a,b]$, an denen u differenzierbar ist. Dann gilt

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t B(s)\, ds\right) \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

(b) Zeige folgendes Vergleichsprinzip: Seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und global Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente. Zudem gelte (1)

$$\dot{u}(t) \leq f(t, u(t)) \quad \text{und} \quad \dot{v}(t) \geq f(t, v(t)) \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

Wir nennen in diesem Fall u eine Unter- und v eine Oberlösung der dazugehörigen Gleichung. Zeige, dass dann aus $u(a) \leq v(a)$ bereits $u(t) \leq v(t)$ für alle $t \in [a,b]$ folgt.

Bemerkung: Wir begnügen uns damit den Beweis unter der vereinfachenden Annahme zu führen, dass $u(t) - v(t)$ auf $[a,b]$ nur endlich viele Vorzeichenwechsel besitzt. Die Aussage bleibt jedoch auch in der obigen Allgemeinheit gültig.

Tipp: Betrachte $g(t) = \max(0, u(t) - v(t))^2$.

7. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= y^2(t) - t^2 \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass für $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $t_0 > 0$ und $x_0 \in (-t_0, t_0)$ das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit $I \supset [t_0, \infty)$ besitzt. (1)

(b) Zeige, dass $y_+(t) = -\sqrt{t^2 - 2}$ (definiert für $t > \sqrt{2}$) (diese Funktion parametrisiert gerade einen Teil der Niveaumenge $f(t,x) = -2$) für hinreichend große Zeiten eine Oberlösung der Gleichung ist. (1)

(c) Zeige, dass die Lösung y des Anfangswertproblems aus Teil (a) folgendes asymptotische Verhalten besitzt: (1)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{-t} = 1.$$