Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler

Besprechung: Donnerstag, 21.11.2013

Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 4

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 4

8. *Nichtlineare asymptotische Stabilität ohne negative Eigenwerte.* Gib ein Beispiel eines $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ mit $f(0) = 0$ für das nicht jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $Df(0)$ die Ungleichung $\operatorname{Re}\lambda < 0$ erfüllt, aber dennoch jede Lösung x der Anfangswertprobleme (für variierende $x_0 \in \mathbb{R}^n$) (2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

für alle positive Zeiten definiert ist und $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ erfüllen.

Dies zeigt, dass der Satz aus der Vorlesung zwar ein hinreichendes Kriterium für asymptotische Stabilität an einem Gleichgewichtspunkt liefert, aber dass die Voraussetzungen aus dem Satz asymptotische Stabilität nicht charakterisieren.

9. *Eine partielle Umkehrung des Stabilitätssatzes.* Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ mit $f(0) = 0$. Ferner gebe es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $Df(0)$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Zeige, dass es für jede Nullumgebung U ein $x_0 \in U$ und eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ von (2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

gibt so, dass $\|x(t)\|_2$ in einem Intervall der Form $[0, t_0]$ streng monoton wachsend ist.

Bemerkung: Alternativ kann die Aufgabe auch unter der vereinfachten Annahme, dass $\lambda > 0$ und dass es einen reellen Eigenvektor zu λ gibt, bewiesen werden.