Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 6

13. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f(x) = Ax$. Zeige, dass für eine positiv definite symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Funktion $V(x) = x^T Px$ genau dann eine strikte Ljapunov-Funktion in 0 ist, wenn es eine positiv definite symmetrische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit (1)

$$A^T P + PA + Q = 0.$$

14. Bestimme eine strikte Ljapunov-Funktion in $(0,0)$ des Differenzialgleichungssystems (1)

$$\dot{x}(t) = -2x(t) - y^2(t)$$
$$\dot{y}(t) = -y(t) - x^2(t).$$

15. Ein punktförmiges Teilchen bewegt sich auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ unter dem Einfluss einer Newtonschen Kraft $F \in C^1(\mathbb{R})$, die nur vom Ort des Teilchens abhängt. Wir nehmen zusätzlich an, dass die Kraft im Nullpunkt verschwindet und außerhalb immer auf den Ursprung gerichtet ist (also insbesondere nicht verschwindet). Zeige, dass dann die Ruhelage im Nullpunkt ein stabiler Gleichgewichtspunkt des Systems ist. (1)

Tipp: Betrachte die Gesamtenergie E des Systems, die sich aus der kinetischen Energie (Bewegungsenergie) und der potentiellen Energie des Teilchens zusammensetzt. Der Anteil der potentiellen Energie entsteht durch die Arbeit, die das Teilchen gegen die Kraft verrichten muss.