Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 4

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 8

17. *Limesmengen eindimensionaler Systeme.* Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f(x) \neq 0$ sonst. Bestimme für $x \in [0, 1]$ die Limesmenge $\omega(x)$. (1)

18. Sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Wir betrachten das zu $f(x) = Ax$ gehörende dynamische System. Bestimme für $x \in \mathbb{C}^2$ die Limesmenge $\omega(x)$. (1)

19. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1)^2(\sin(x_1) - x_2\cos(x_1)) \\ \sin(x_1) + x_2\cos(x_1) \end{pmatrix}$$

(a) Zeige, dass für das dazugehörige dynamische System alle Bahnen global sind. (1)

(b) Bestimme für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ die Limesmenge $\omega(x)$. (1)
Hinweis: Für $x = (x_1, x_2) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ sei (r, ϑ) die Polarkoordinatendarstellung von $(\tan x_1, x_2)$. Dann gilt und darf ohne Beweis verwendet werden, dass der Fluss Φ des Systems

$$\Phi(t, x) = \begin{pmatrix} \arctan(re^{\tau(t)}\cos(\tau(t) + \vartheta)) \\ re^{\tau(t)}\sin(\tau(t) + \vartheta) \end{pmatrix}$$

erfüllt. Hierbei ist τ die Lösung von

$$\dot{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2e^{2\tau(t)}\cos^2(\tau(t))}} \qquad \text{mit} \qquad \tau(0) = 0.$$