Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 23.1.2014

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 4

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 11

25. Sei M eine positiv invariante Menge eines dynamischen Systems. Zeige, dass dann auch $\overline{M}$ und M° positiv invariant sind. (1)

26. *Invarianz und Modellierung.* Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Wir betrachten das dynamische System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= y(t) g(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Systeme der obigen Form treten in der Biologie auf und beschreiben dort etwa die zeitliche Populationsdynamik von Räuber-Beute-Systemen. Damit die Gleichung ein sinnvolles Modell liefert, sollten sich nicht-negative Anfangsbestände auch für alle Zeiten zu nicht-negativen Beständen entwickeln. Wir interessieren uns also für die Invarianz des ersten Quadranten. Diese folgt sofort aus den Resultaten aus der Vorlesung.

Zeige auch von Hand ohne das Invarianzkriterium, dass jeder der vier Quadranten des dynamischen Systems positiv invariant ist. (1)

27. *Invariante Mengen und Hamiltonsche Systeme.* In dieser Aufgabe wollen wir eine weitere Motivation geben, warum Invarianzeigenschaften wichtig für das Studium dynamischer Systeme sind. Sei $\mathbb{R}^{2n}$ gegeben mit den Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$. Für eine Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ betrachten wir das dazugehörige Hamiltonsche System, das durch die Gleichungen

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p_1(t), \ldots, q_n(t)), \qquad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p_1(t), \ldots, q_n(t))$$

für $i = 1, \ldots, n$ gegeben ist. Wir nehmen desweiteren an, dass alle Lösungen der obigen Gleichung für alle positiven Zeiten existieren.

(a) Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ so, dass das Vektorfeld $\operatorname{grad} F$ senkrecht auf dem Vektorfeld $(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i})$ steht. Zeige dann, dass für $c \in \mathbb{R}$ die Niveaumengen $F^{-1}(\{c\})$ positiv invariant sind. Insbesondere sind also die Niveaumengen $H^{-1}(\{c\})$ positiv invariant. (1)

(b) Wir betrachten nun den harmonischen Oszillator. Dieser besitzt die Hamiltonfunktion $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ für ein $\omega > 0$. Benutze den ersten Teil um die Hamiltongleichung auf jeder Energiefläche $H^{-1}(\{c\})$ auf eine eindimensionale Gleichung zu reduzieren und löse diese explizit. (1)

Bemerkung: Findet man ein solches F, spricht man davon, ein *erstes Integral* dieses Systems gefunden zu haben. Jedes solche Integral erlaubt es das System wie in Teil (b) auf einer Fläche zu betrachten, die eine Dimension weniger hat. Findet man etwa sogar n solcher Funktionen, kann das System von $2n$ auf n Dimensionen reduziert werden. In diesem Fall nennt man das System *vollständig integrabel* (wobei der Begriff der *Integrabilität* nicht einheitlich verwendet wird).