Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 30.1.2014

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 3

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 12

28. Sei Λ eine positiv invariante Menge eines dynamischen Systems so, dass jeder Orbit in Λ dicht in Λ liegt. Zeige, dass dann Λ topologisch transitiv ist. (1)

29. Zeige, dass für $r \in (0,1)$ jede Lösung der Lorenz-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned}$$

gegen den Ursprung konvergiert. (1)

Tipp: Verwende hierzu die Lyapunov-Methode und wähle den Ansatz $V(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ für $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

30. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Lorenz-Gleichung immer eine anziehende Menge besitzt. Folge dabei der unteren Anleitung:

Betrachte die Lyapunov-Funktion $V(x,y,z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2r)^2$ und zeige, dass $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dot{V}(x,y,z) \geq 0\}$ ein Ellipsoid definiert. Setze M als das Maximum von V auf E und $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : V(x,y,z) < M+1\}$. Zeige, dass alle Lösungen der Lorenz-Gleichung für alle positiven Zeiten existieren. Zeige ferner, dass E_1 ein Einfangsgebiet der Gleichung ist und folgere daraus, dass

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \Phi(t, E_1)$$

eine nicht-leere anziehende Menge ist. (1)