Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler

Besprechung: Donnerstag, 6.2.2014

Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 4

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 13

31. Zeige, dass eine geschlossene Bahn eines planaren dynamischen Systems eine lokale Sektion in höchstens einem Punkt schneidet. (1)

32. Sei x ein rekurrenter Punkt eines planaren dynamischen Systems mit Fluss Φ, d.h. es existiert eine Folge $t_n \to \infty$ mit $\Phi(t_n, x) \to x$.

(a) Zeige, dass x ein Gleichgewichtspunkt ist oder in einem geschlossenen Orbit liegt. (1)
Tipp: Verwende lokale Sektionen.

(b) Zeige, dass es in höherdimensionalen dynamischen Systemen rekurrente Punkte geben kann, die weder Gleichgewichtspunkte sind noch in einem geschlossenen Orbit liegen. (1)

33. Wir betrachten ein planares System mit nur endlich vielen Gleichgewichtspunkten. Ferner habe $x \in \mathbb{R}^2$ eine kompakte Bahn. Zeige dann, dass $\omega(x)$ entweder ein geschlossener Orbit oder die Vereinigung von Gleichgewichtspunkten und Trajektorien, die für $t \to \infty$ gegen Gleichgewichtspunkte konvergieren, ist. (1)

Hinweis: Um eine Intuition für das Problem zu bekommen, studiere die Aufgabe in dem skizzierten Beispiel nach der Formulierung des Satzes von Poincaré-Bendixson aus der Vorlesung.

Tipp: Zeige, dass für $y \in \omega(x)$ die Limesmenge $\omega(y)$ nur aus Gleichgewichtspunkten bestehen kann. Hierbei hilft es zu zeigen, dass die Bahn einer periodischen Lösung in $\omega(x)$ automatisch die gesamte Limesmenge $\omega(x)$ ausfüllt.