Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 4

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 14

34. Wir betrachten das durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y + x^2 - \frac{1}{4}x(y-1+2x^2) \\ -2(1+y)x \end{pmatrix}$$

definierte planare dynamische System.

(a) Bestimme alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems. (1)

(b) Zeige, dass die Kurven $y = 1 - 2x^2$ und $y = -1$ invariant unter der Gleichung sind. (1)

(c) Bestimme möglichst genau für (x_0, y_0) in dem von den beiden Kurven aus Teil (b) berandeten Gebiet G die ω-Limesmenge $\omega((x_0, y_0))$. (1)

Hinweis: Betrachte $H(x,y) = x^2(1+y) + \frac{y^2}{2}$ entlang von Lösungen und bestimme $H^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.

35. *Der Fixpunktsatz von Brouwer.* Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ die abgeschlossene euklidische Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Der Fixpunktsatz von Brouwer besagt, dass jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ einen Fixpunkt besitzt.

Beweise den Fixpunktsatz von Brouwer für $n = 2$. Gehe dazu folgendermaßen vor: Nehme zuerst an, dass $f \in C^1(\mathbb{D}^2)$ liegt und finde einen Gleichgewichtspunkt für das Vektorfeld $g(x) = f(x) - x$. Zeige dann den allgemeinen Fall, indem du verwendest, dass jede stetige Abbildung der gleichmäßige Grenzwert von C^1-Funktionen ist.

Hinweis: Verwende folgenden Satz, der in der Vorlesung nicht besprochen wurde.

Sei $W \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten ein planares dynamisches System auf W. Sei γ ein geschlossener Orbit des Systems, der eine offene Menge U umschließt, für die $U \subset W$ gilt. Dann enthält U einen Gleichgewichtspunkt. (1)