Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 06.11.2014

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15

Übungen Maßtheorie: Blatt 3

Die Übungen am 5. November fallen aus. Die Bearbeitungen zu diesem Übungsblatt werden ausnahmsweise in der Vorlesung am 6. November eingesammelt. Das Übungsblatt wird zusammen mit dem 4. Übungsblatt, das regulär erscheint, in den Übungen am 12. November besprochen, die ausnahmsweise zweistündig stattfinden.

6. Sei A eine Menge. Eine *binäre Relation* ist eine Teilmenge R von $A \times A$. Gilt für $x, y \in A$, dass $(x, y) \in R$, so schreibt man $x \sim y$. Man nennt die Relation $\sim$ eine *Äquivalenzrelation*, falls

(a) $x \sim x$ für alle $x \in A$ (reflexiv).

(b) $x \sim y$ impliziert $y \sim x$ (symmetrisch).

(c) $x \sim y$ und $y \sim z$ implizieren $x \sim z$ (transitiv).

Für $x \in A$ bezeichnet $[x] \coloneqq \{y \in A : x \sim y\}$ die *Äquivalenzklasse von x*. Die Äquivalenzklassen zu zwei Elementen aus A sind entweder identisch oder disjunkt. Die Menge aller Äquivalenzklassen von X unter $\sim$ bildet somit eine disjunkte Zerlegung von A.

(a) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeige, dass (3)

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \mu((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = 0$$

eine Äquivalenzrelation auf Σ definiert. Was bedeutet die Äquivalenzrelation in Worten?

(b) Sei $\Omega = \mathbb{Z}$ und $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Setze (3)

$$\mu(A) = \#(A \cap 2\mathbb{Z}) \qquad \text{für } A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}),$$

wobei # die Anzahl der Elemente in der Menge bezeichnet. Zeige, dass (Ω, Σ, μ) ein Maßraum ist und bestimme die Äquivalenzklassen unter der in (a) definierten Äquivalenzrelation.

7. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeige, dass für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ (4)

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

8. Sei $d \in \mathbb{N}$ und A eine invertierbare $d \times d$-Matrix. Zeige, dass dann $A\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Hierbei ist (5)

$$A\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : C = AB \text{ für ein } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}.$$