Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 12.11.2014

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15+5

Übungen Maßtheorie: Blatt 4

9. Zeige, dass das Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}^2$ für alle invertierbaren 2×2-Matrizen A und alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (7)

$$\lambda(AB) = |\det A| \cdot \lambda(B)$$

erfüllt.

Hinweis: Verwende Elementarmatrizen.

10. *Vervollständigung von Maßräumen.* Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

(a) Sei $\mathcal{N}$ die Menge aller Nullmengen von (Ω, Σ, μ), also (4)

$$\mathcal{N} = \{A \subset \Omega : A \subset B \text{ für ein } B \in \Sigma \text{ mit } \mu(B) = 0\}.$$

Wir setzen

$$\overline{\Sigma} := \{A \cup N : A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}\}.$$

Zeige, dass $(\Omega, \overline{\Sigma})$ ein Messraum ist.

(b) Sei $\overline{\mu} \colon \overline{\Sigma} \to [0, \infty]$ für $A \in \Sigma$ und $N \in \mathcal{N}$ gegeben durch (4)

$$\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A).$$

Zeige, dass $\overline{\mu}$ wohldefiniert ist und $(\Omega, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ ein Maßraum ist.

(c) Für $d \in \mathbb{N}$ sei $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda) = (\mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}, \overline{\lambda})$ die Vervollständigung des Maßraumes bestehend aus den Borelmengen und dem Lebesgue-Maß. Man nennt Elemente aus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ *Lebesgue-Mengen.* (+5)
Zeige, dass $|\mathcal{L}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$, d.h. die beiden Mengen haben die gleiche Mächtigkeit.

Wiederholung: Seien A und B zwei Mengen. Man sagt, dass A *höchstens gleichmächtig* wie B ist und schreibt $|A| \le |B|$, falls es eine injektive Abbildung $f \colon A \to B$ oder äquivalent eine surjektive Abbildung $g \colon B \to A$ gibt. Man sagt, dass A und B die *gleiche Mächtigkeit* haben und schreibt $|A| = |B|$, falls es eine bijektive Abbildung $f \colon A \to B$ gibt.
Man kann zeigen (Satz von Cantor–Bernstein–Schröder) und darf verwenden, dass aus $|A| \le |B|$ und $|B| \le |A|$ bereits $|A| = |B|$ folgt.
Hinweis: Verwende die Eigenschaften der Cantor-Menge aus der Vorlesung.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$. Es gibt also in einem gewissen Sinne viel mehr Lebesgue-Mengen als Borelmengen.