Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15+5

Übungen Maßtheorie: Blatt 7

18. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ das Zählmaß ist. Zeige, dass für $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (4)

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

19. Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Zeige, dass für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda)$ das Transformationsgesetz (4)

$$|\det A| \int_{\mathbb{R}^2} f \circ A \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda$$

gilt. Hierbei identifizieren wir wie immer A mit der von A induzierten linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Natürlich gilt dieselbe Aussage auf $\mathbb{R}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

20. *Etwas zur Struktur von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.* Per Definition ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von $\mathbb{R}$ enthält. Da eine σ-Algebra abgeschlossen unter Komplementbildung ist, liegen auch alle abgeschlossenen Mengen in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Man könnte also auf den ersten Blick erwarten, dass sich jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ schreiben lässt als $B = (\cup_{n\in\mathbb{N}} O_n) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, wobei $O_n \subset \mathbb{R}$ offen und $A_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen für $n \in \mathbb{N}$ ist. (7)

Zeige, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine Borelmenge ist, die sich nicht so schreiben lässt.

Hinweis: Versuche das Problem zu vereinfachen. Eventuell ist es hilfreich, auf die mengentheoretischen Komplemente überzugehen.

21. Auf Blatt 6 haben wir gesehen, dass jede Jordan-messbare beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ liegt. Zeige oder widerlege: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar, so gilt bereits $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (+5)