Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15

Übungen Maßtheorie: Blatt 8

22. Sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \mu)$ ein Maßraum und (Ω, Σ) ein Messraum. Für eine messbare Funktion $f\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ definieren wir

$$f_*(\mu)(A) \coloneqq \mu(f^{-1}(A)) \qquad (A \in \Sigma).$$

(a) Zeige, dass $(\Omega, \Sigma, f_*(\mu))$ ein Maßraum ist. Das Maß $f_*(\mu)$ heißt *das Bildmaß von μ unter f*. (2)

(b) Zeige, dass eine messbare Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann in $\mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, f_*(\mu))$ liegt, wenn $g \circ f \in \mathcal{L}^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \mu)$. Zeige weiter, dass in diesem Fall (5)

$$\int_\Omega g \, d(f_*(\mu)) = \int_{\tilde{\Omega}} g \circ f \, d\mu.$$

(c) Wir betrachten nun folgendes Beispiel: Sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \mu) = ((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda_{|(0,1)})$ und $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ sowie $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Zeige, dass $g(x,y) = x^2 + y^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), f_*(\lambda))$ und bestimme (2)

$$\int_{\mathbb{R}^2} g \, d(f_*(\lambda)).$$

23. Zeige oder widerlege: Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ mit $|f(x)| \le \varepsilon$ für alle $|x| > R$. (3)

24. Stimmt folgende Version des Satzes von Lebesgue für Riemann-Integrale? Seien $g, f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $|f_n(x)| \le |g(x)|$ für alle $x \in [0,1]$. Ferner existiere $f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Dann ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit (3)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx$$

als Riemann-Integrale.