Übungen Maßtheorie: Blatt 14

Bitte beachten: Am 14. Februar ist die Anmeldefrist für die Vorleistung!

37. Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Bestimme

(a) die von $\mathcal{B}$ erzeugte monotone Klasse. (1)

(b) das von $\mathcal{B}$ erzeugte Dynkin-System. (1)

(c) die von $\mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra. (1)

38. Gebe ein Beispiel einer Algebra, die keine σ-Algebra ist. (2)

39. Seien $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Borel-messbar und beschränkt derart, dass für alle $-\infty < a < b < \infty$

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_{[a,b]} g \, d\lambda.$$

(a) Zeige, dass $f = g$ fast überall. (5)

(b) Bleibt die Aussage richtig, falls man auf die Beschränktheit von f und g verzichtet? (+5)

40. Sei $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Es ist also $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$. Für $\theta_1 < \theta_2$ sei $S_{\theta_1,\theta_2} \coloneqq \{e^{i\theta} : \theta \in (\theta_1, \theta_2)\}$ ein Kreisbogen. Wir betrachten $\mathbb{S}^1$ als metrischen Raum mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Metrik. Zeige, dass es ein eindeutiges Maß μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ gibt mit (5)

$$\mu(S_{\theta_1,\theta_2}) = \theta_2 - \theta_1$$

für alle $\theta_1 < \theta_2$ mit $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$.

Hinweis: Für die Existenz ist das Betrachten eines geeigneten Bildmaßes hilfreich.