Universität Ulm

Mittwoch, 25.2.2015

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 100+20

Klausur Maßtheorie

100 Punkte entsprechen 100% in der Notenskala. Die letzte Aufgabe ist eine Bonusaufgabe und hat einen höheren Schwierigkeitsgrad. Bitte Rückseite beachten!

1. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen. Achte dabei auf vollständige Argumentationen. Aussagen aus der Vorlesung und den Übungen dürfen verwendet werden. Beachte, dass es nur Punkte für die korrekte Argumentation und nicht für die Wahr-/ Falsch-Aussage gibt.

(a) Jede differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (Borel-)messbar. (5)

(b) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : e^x \leq 7\}$ ist eine Borelmenge. (5)

(c) Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht-leer. Dann gilt $\lambda(O) > 0$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. (5)

(d) Sei μ ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$, d.h. es gilt $\mu(A + m) = \mu(A)$ für alle $A \subset \mathbb{Z}$ und alle $m \in \mathbb{Z}$. Ist $\mu(\{m\}) < \infty$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, so ist μ ein skalares Vielfaches des Zählmaßes auf $\mathbb{Z}$. (5)

(e) Es gilt (5)
$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{\cos(x/N)}{1 + x^2} \, d\lambda(x) = \pi.$$

(f) Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. (5)

(g) Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und A eine beschränkte Borelmenge. Dann folgt für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x$ auch $\lambda(A \cap [0, x_n]) \to \lambda(A \cap [0, x])$. (5)

(h) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra, die von allen abgeschlossenen Teilmengen von M erzeugt wird. Dann gilt $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$. (5)

(i) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Dann ist die Menge $C \coloneqq \{f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) : f(x) \geq 0 \text{ fast überall}\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. (5)

(j) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Seien μ und ν zwei endliche Maße auf $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. (5)

2. In den Übungen wurde gezeigt, dass es genau ein Borelmaß μ auf dem metrischen Raum $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ (mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik) gibt derart, dass für $S_{\theta_1,\theta_2} \coloneqq \{e^{i\theta} : \theta \in (\theta_1, \theta_2)\}$ (für $\theta_1 < \theta_2$) gilt:
$$\mu(S_{\theta_1,\theta_2}) = \theta_2 - \theta_1 \qquad \text{für alle } \theta_1 < \theta_2 \text{ mit } \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi.$$
Für $\theta \in \mathbb{R}$ und $A \subset \mathbb{S}^1$ setzen wir $e^{i\theta}A \coloneqq \{y \in \mathbb{S}^1 : y = e^{i\theta}x \text{ für ein } x \in A\}$.

(a) Zeige, dass $e^{i\theta}A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$. (13)

(b) Zeige, dass $\mu(e^{i\theta}A) = \mu(A)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$. (10)

3. Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend und stetig. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es ein eindeutiges Borelmaß λ_F auf $\mathbb{R}$ gibt mit
$$\lambda_F([a, b)) = F(b) - F(a) \qquad \text{für alle } -\infty < a < b < \infty.$$

Sei nun F zusätzlich stetig differenzierbar.

(a) Zeige, dass (12)

$$\lambda_F(A) = \int_A F' \, d\lambda \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(b) Sei nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Borel-)messbar. Zeige ohne Resultate aus den Übungsaufgaben zu verwenden, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_F)$ genau dann, wenn $f \cdot F' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (λ Lebesgue-Maß) und dass in diesem Fall (15)

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} f \cdot F' \, d\lambda.$$

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Borel-)messbar mit $|f(x,y)| \leq 1$ fast überall. Zeige, dass es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ gibt so, dass für alle $x \notin N$ die Funktion $f(x,\cdot)$ in $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ liegt, wobei wie in der Vorlesung (+20)

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) := \{g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ (Borel-)messbar: } |g(y)| \leq C \text{ fast überall für ein } C > 0\}.$$