Universität Ulm

Mittwoch, 25.2.2015

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 100+20

Lösungen zur Klausur Maßtheorie

100 Punkte entsprechen 100% in der Notenskala. Die letzte Aufgabe ist eine Bonusaufgabe und hat einen höheren Schwierigkeitsgrad. Bitte Rückseite beachten!

1. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen. Achte dabei auf vollständige Argumentationen. Aussagen aus der Vorlesung und den Übungen dürfen verwendet werden. Beachte, dass es nur Punkte für die korrekte Argumentation und nicht für die Wahr-/ Falsch-Aussage gibt.

(a) Jede differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (Borel-)messbar. (5)

Lösung: Die Aussage ist wahr. Jede differenzierbare Funktion ist stetig (2 Punkte) und damit nach den Übungen (Borel)-messbar (3 Punkte).

(b) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : e^x \leq 7\}$ ist eine Borelmenge. (5)

Lösung: Die Aussage ist wahr.

1. Lösung: Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist stetig / monoton und damit (Borel)-messbar (2 Punkte). Damit ist $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 7\}$ als Urbild des Intervalls $(-\infty, 7]$, das eine Borelmenge ist (1 Punkt), nach der Definition von Messbarkeit eine Borelmenge (2 Punkte).

2. Lösung: Es gilt $\{x \in \mathbb{R} : e^x \leq 7\} = (-\infty, \log 7]$ (2 Punkte) und ist damit ein Intervall, also insbesondere eine Borelmenge (3 Punkte).

(c) Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht-leer. Dann gilt $\lambda(O) > 0$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. (5)

Lösung: Die Aussage ist wahr. Sei $x \in O$ (möglich, da O nicht-leer). Da O offen ist, enthält O eine Kugel B (1 Punkt). Nun kann man auf unterschiedliche Art weiterargumentieren:

1. Möglichkeit: Die Kugel B enthält einen Quader Q mit nicht-leerem Inneren (2 Punkte). Aus der Monotonie und der Definition des Lebesgue-Maßes folgt $\lambda(O) \geq \lambda(Q) > 0$ (2 Punkte).

2. Möglichkeit: Das Lebesgue-Maß einer Kugel stimmt mit dessen Jordan-Maß überein (2 Punkte). Dieses hat man in Analysis II explizit berechnet und ist insbesondere positiv (2 Punkte).

(d) Sei μ ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$, d.h. es gilt $\mu(A + m) = \mu(A)$ für alle $A \subset \mathbb{Z}$ und alle $m \in \mathbb{Z}$. Ist $\mu(\{m\}) < \infty$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, so ist μ ein skalares Vielfaches des Zählmaßes auf $\mathbb{Z}$. (5)

Lösung: Die Aussage ist wahr. Sei $c = \mu(\{0\})$. Für $m \in \mathbb{Z}$ folgt wegen der Translationsinvarianz von μ

$$\mu(\{m\}) = \mu(\{0\} + m) = \mu(\{0\}) = c$$

(3 Punkte). Aus der σ-Additivität des Maßes folgt nun für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$$\mu(A) = \mu(\cup_{m \in A} \{m\}) = \sum_{m \in A} \mu(\{m\}) = c \sum_{m \in A} 1 = c \cdot \#(A).$$

(2 Punkte). Alternativ kann man die Gleichheit wie oben auch erst für Einpunktmengen zeigen und dann überprüfen, dass man den Eindeutigkeitssatz für Maße aus der Vorlesung anwenden kann. Man achte hierbei auf die letzte Ausschöpfungsvoraussetzung!

(e) Es gilt (5)

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\cos(x/N)}{1+x^2}\,d\lambda(x)=\pi.$$

Lösung: Die Aussage ist wahr. Es gilt

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\cos(x/N)}{1+x^2}\,d\lambda(x)=\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(x/N)}{1+x^2}\mathbb{1}_{[-N,N]}(x)\,d\lambda(x).$$

(2 Punkte). Der Integrand auf der rechten Seite konvergiert punktweise gegen $(1+x^2)^{-1}$ (1 Punkt) und wird von derselben Funktion dominiert (1 Punkt). Wir können also den Satz von Lebesgue anwenden und damit Grenzwert und Integral vertauschen und erhalten

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\cos(x/N)}{1+x^2}\,d\lambda(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\pi.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass für stetige positive Funktionen das Lebesgue-Integral nach der Vorlesung mit dem Riemann-Integral übereinstimmt (1 Punkt).

(f) Sei (Ω,Σ,μ) ein endlicher Maßraum und $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Dann ist $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. (5)

Lösung: Die Aussage ist wahr. Nach Voraussetzung gibt es ein $C>0$ mit $|f(x)|\le C$ für alle $x\in\Omega$. Hieraus folgt

$$\int_\Omega |f|\,d\mu\le C\int_\Omega \mathbb{1}\,d\mu=C\mu(\Omega).$$

(5 Punkte). Alternativ kann man auch die in den Übungen gezeigte Inklusion für L^p-Räume über endlichen Maßräumen verwenden (4 Punkte), wenn man darauf eingeht, dass für f messbar aus $f\in L^1$ auch $f\in\mathcal{L}^1$ folgt (1 Punkt).

(g) Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und A eine beschränkte Borelmenge. Dann folgt für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ mit $x_{n+1}\ge x_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $x_n\to x$ auch $\lambda(A\cap[0,x_n])\to\lambda(A\cap[0,x])$. (5)

Lösung: Die Aussage ist wahr.

1. Lösung: Man schreibt $\lambda(A\cap[0,x_n])=\int_\Omega \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{[0,x_n]}\,d\lambda$ (1 Punkt). Nun ist $f_n=\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_{[0,x_n]}$ eine punktweise monotone (1 Punkt) Folge positiver (1 Punkt) messbarer Funktionen. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt nun

$$\begin{aligned}\lambda(A\cap[0,x])&=\int_\Omega \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{[0,x)}\,d\lambda=\int_\Omega\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{[0,x_n]}\,d\lambda=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega\mathbb{1}_{A\cap[0,x_n]}\,d\lambda\\&=\sup_{n\in\mathbb{N}}\lambda(A\cap[0,x_n])=\lim_{n\to\infty}\lambda(A\cap[0,x_n]).\end{aligned}$$

(2 Punkte).

2. Lösung: Die Mengen $A_n=A\cap[0,x_n]$ für $n\in\mathbb{N}$ sind aufsteigend und somit gilt nach der Stetigkeit des Maßes

$$\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\lambda(A\cap[0,x_n)).$$

(3 Punkte). Da Einpunktmengen Nullmengen sind, folgt die Aussage aus $\lambda(A\cap[0,x))=\lambda(A\cap[0,x])$ (2 Punkte).

(h) Sei (M,d) ein metrischer Raum und $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra, die von allen abgeschlossenen Teilmengen von M erzeugt wird. Dann gilt $\mathcal{A}=\mathcal{B}(M)$. (5)

Lösung: Die Aussage ist richtig. Sei $A\subset M$ abgeschlossen. Dann ist A^c offen. Umgekehrt ist für $O\subset M$ offen die Menge O^c abgeschlossen (1 Punkt). Aus der ersten Aussage folgt, dass A^c und damit A in $\mathcal{B}(M)$ für alle abgeschlossen Teilmengen $A \subset M$ liegt (1 Punkt). Da $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft ist, folgt $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(M)$ (1 Punkt). Umgekehrt folgt aus der zweiten Aussage, dass O^c und damit O in $\mathcal{A}$ für alle offenen Teilmengen $O \subset M$ liegt (1 Punkt). Da $\mathcal{B}(M)$ die kleinste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft ist, folgt $\mathcal{B}(M) \subset \mathcal{A}$ (1 Punkt). Damit ist die Gleichheit bewiesen.

(i) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Dann ist die Menge $C := \{f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) : f(x) \geq 0 \text{ fast überall}\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. (5)

Lösung: Die Aussage ist wahr. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ mit $f_n \to f$ in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Nach dem Korollar aus dem Satz von Riesz-Fischer gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Nullmenge N_0 mit $f_{n_k}(x) \to f(x)$ für alle $x \notin N_0$ (2 Punkte). Sei $k \in \mathbb{N}$. Wegen $f_{n_k} \in C$ gibt es eine Nullmenge N_k mit $f_{n_k}(x) \geq 0$ für alle $x \notin N_k$. Dann ist $N = \cup_{k\in\mathbb{N}_0} N_k$ als abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder eine Nullmenge nach den Übungen (2 Punkte). Für $x \notin N$ folgt nun

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \geq 0.$$

(1 Punkt). Also gilt $f \in C$.

(j) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Seien μ und ν zwei endliche Maße auf $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. (5)

Lösung: Die Aussage ist falsch. Setze $\mu = \delta_1$ und $\nu = \delta_1 + \delta_3$. Beide Maße sind offensichtlich endlich und erfüllen $\mu(A) = \nu(A) = 1$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dennoch sind beide Maße verschieden, da $\mu(\{3\}) = 0$ und $\nu(\{3\}) = 1$ (3 Punkte für ein richtiges Gegenbeispiel, 2 Punkte für eine vollständige Argumentation).

2. In den Übungen wurde gezeigt, dass es genau ein Borelmaß μ auf dem metrischen Raum $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ (mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik) gibt derart, dass für $S_{\theta_1,\theta_2} := \{e^{i\theta} : \theta \in (\theta_1, \theta_2)\}$ (für $\theta_1 < \theta_2$) gilt:

$$\mu(S_{\theta_1,\theta_2}) = \theta_2 - \theta_1 \qquad \text{für alle } \theta_1 < \theta_2 \text{ mit } \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi.$$

Für $\theta \in \mathbb{R}$ und $A \subset \mathbb{S}^1$ setzen wir $e^{i\theta}A := \{y \in \mathbb{S}^1 : y = e^{i\theta}x \text{ für ein } x \in A\}$.

(a) Zeige, dass $e^{i\theta}A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$. (13)

Lösung: Sei $\theta \in \mathbb{R}$ fest. Beachte, dass $z \mapsto e^{i\theta}z$ eine stetige Abbildung ist (klar auf $\mathbb{R}^2$, da Drehung und damit per Einschränkung auch auf $\mathbb{S}^1$) mit stetiger Umkehrabbildung $z \mapsto e^{-i\theta}z$. Also ist $z \mapsto e^{i\theta}z$ ein Homöomorphismus und bildet damit offene Teilmengen von $\mathbb{S}^1$ auf offene Teilmengen von $\mathbb{S}^1$ (bijektiv) ab. Anders formuliert ist $e^{i\theta}O$ offen für alle $O \subset \mathbb{S}^1$ offen (1 Punkt für die Tatsache, 4 Punkte für die Argumentation).

Betrachte nun $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1) : e^{i\theta}A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)\}$. Nach dem ersten Teil enthält $\mathcal{A}$ alle offenen Teilmengen von $\mathbb{S}^1$ (1 Punkt). Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

1. $\emptyset, \mathbb{S}^1$ sind offen und damit Elemente von $\mathcal{A}$ (1 Punkt).
2. Da $z \mapsto e^{i\theta}z$ bijektiv ist, vertauscht die Abbildung mit allen Mengenoperationen (2 Punkte). Hieraus folgt für $A \in \mathcal{A}$ wegen

$$e^{i\theta}(A^c) = (e^{i\theta}A)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1),$$

dass $A^c \in \mathcal{A}$ (1 Punkt). Analog sieht man, dass

3. für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ wegen

$$e^{i\theta}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} e^{i\theta}(A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$$

auch $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$ gilt (1 Punkt).

Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, die alle offenen Mengen von $\mathbb{S}^1$ enthält, folgt $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{A}$. Mit anderen Worten haben wir gezeigt, dass $e^{i\theta}A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (2 Punkte).

Alternativ kann man den ersten Teil auch nur für Mengen der Form S_{θ_1,θ_2} für $\theta_1 < \theta_2$ zeigen und dann im letzten Schritt verwenden, dass die Mengen nach den Übungen bereits die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ erzeugen.

(b) Zeige, dass $\mu(e^{i\theta}A) = \mu(A)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$. (10)

Lösung: Wir definieren ein Borelmaß auf $\mathbb{S}^1$ durch $\nu(A) = \mu(e^{i\theta}A)$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$. Dieses ist wegen dem ersten Teil wohldefiniert (also $e^{i\theta}A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle Borelmengen A und damit können wir $e^{i\theta}A$ in das Maß μ einsetzen). Zudem braucht man hier wieder, dass $e^{i\theta}$ mit allen Mengenoperationen vertauscht (3 Punkte). Für $\theta_1 < \theta_2$ mit $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ gilt nach Definition von μ

$$\mu(S_{\theta_1,\theta_2}) = \theta_2 - \theta_1$$

sowie

$$\nu(S_{\theta_1,\theta_2}) = \mu(e^{i\theta}S_{\theta_1,\theta_2}) = \mu(S_{\theta_1+\theta,\theta_2+\theta}) = \theta_2 - \theta - (\theta_1 - \theta) = \theta_2 - \theta_1.$$

Also stimmen beide Maßen auf diesen Kreisbögen überein (4 Punkte). Aus der Eindeutigkeitsaussage in der Aufgabenstellung folgt nun $\mu = \nu$, d.h. die Aussage (3 Punkte)

$$\mu(e^{i\theta}A) = \nu(A) = \mu(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Alternativ kann man auch den Eindeutigkeitssatz für Maße aus der Vorlesung für den letzten Schritt verwenden, wenn man sauber alle Voraussetzungen des Satzes überprüft. Insbesondere ist zu beachten, dass die Menge $\{S_{\theta_1,\theta_2} : \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi\}$ nicht durchschnittsstabil ist (vgl. Übungen).

3. Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend und stetig. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es ein eindeutiges Borelmaß λ_F auf $\mathbb{R}$ gibt mit

$$\lambda_F([a,b)) = F(b) - F(a) \qquad \text{für alle } -\infty < a < b < \infty.$$

Sei nun F zusätzlich stetig differenzierbar.

(a) Zeige, dass (12)

$$\lambda_F(A) = \int_A F'\, d\lambda \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Lösung: Wir setzen $\mu(A) = \int_A F'\, d\lambda$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nach der Vorlesung ist μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ (2 Punkte). Für $-\infty < a < b < \infty$ gilt

$$\mu([a,b)) = \int_{[a,b)} F'\, d\lambda = \int_{[a,b]} F'\, d\lambda = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Hier haben wir verwendet, dass F' stetig und damit Riemann-integrierbar ist. Nach der Vorlesung stimmen also Riemann- und Lebesgue-Integral überein (2 Punkte). Die letzte Gleichheit folgt dann aus dem Hauptsatz für das Riemann-Integral, da F stetig differenzierbar nach Voraussetzung ist (2 Punkte). Wir haben also gezeigt, dass λ_F und μ auf allen endlichen Intervallen der Form $[a,b)$ übereinstimmen. Die Gleichheit beider Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ folgt nun aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße aus der Vorlesung. Hierzu müssen wir die drei Voraussetzungen aus der überprüfen.

1. Nach dem ersten Übungsblatt erzeugen die Intervalle der obigen Form $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (2 Punkte).

2. Die Intervalle der obigen Form sind durchschnittstabil, was man aus der Vorlesung weiß oder schnell überprüfen kann (2 Punkte).
3. Für $E_n = [-n, n)$ gilt $\mu(A_n) = \lambda_F(A_n) < \infty$. Ferner gilt offensichtlich $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}$ (2 Punkte).

(b) Sei nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Borel-)messbar. Zeige ohne Resultate aus den Übungsaufgaben zu verwenden, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_F)$ genau dann, wenn $f \cdot F' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (λ Lebesgue-Maß) und dass in diesem Fall (15)

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} f \cdot F' \, d\lambda.$$

Lösung: Sei zuerst $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k} \in \mathcal{E}_+$ eine positive Treppenfunktion. Dann folgt direkt aus der Definition des Integrals und dem ersten Teil

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_F = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_F(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_k} \, d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k} \cdot F' \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot F' \, d\lambda.$$

(4 Punkte). Sei nun $f \in \mathcal{M}_+$. Dann gibt es nach der Vorlesung eine Folge von Treppenfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ mit $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Aus dem Satz von Beppo Levi und dem ersten Teil der Aufgabe folgt dann

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_F &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\lambda_F = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_F = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n \cdot F' \, d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \cdot F' \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot F' \, d\lambda.\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass F monoton wachsend ist und damit $F' \geq 0$ gilt (1 Punkt hierfür, 5 Punkte für den Rest).
Sei nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_F)$ genau dann, wenn

$$\int_{\mathbb{R}} f^+ \, d\lambda_F < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} f^- \, d\lambda_F < \infty.$$

Dies ist nach dem vorherigen Teil der Aufgabe genau dann der Fall, wenn

$$\int_{\mathbb{R}} f^+ \cdot F' \, d\lambda < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} f^- \cdot F' \, d\lambda < \infty.$$

Da $F' \geq 0$, ist dies wegen $(fF')^+ = f^+F'$ und $(fF')^- = f^-F'$ äquivalent zu $f \cdot F' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Zudem folgt in diesem Fall aus den oberen Aussagen

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} f^+ \, d\lambda_F - \int_{\mathbb{R}} f^- \, d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} (f \cdot F')^+ \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} (f \cdot F')^- \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot F' \, d\lambda.$$

(3 Punkte für das saubere Aufschreiben der Äquivalenz, 2 Punkte für die Identität der Integrale).

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Borel-)messbar mit $|f(x,y)| \leq 1$ fast überall. Zeige, dass es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ gibt so, dass für alle $x \notin N$ die Funktion $f(x, \cdot)$ in $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ liegt, wobei wie in der Vorlesung (+20)

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \coloneqq \{g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ (Borel-)messbar: } |g(y)| \leq C \text{ fast überall für ein } C > 0\}.$$

Lösung: Nach Voraussetzung ist $C \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y)| > 1\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten nun die messbare Funktion $f(x,y) = \mathbb{1}_C(x,y)$. Nach dem Satz von Tonelli ist die Funktion

$$g\colon x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y) \, d\lambda(y)$$

messbar (5 Punkte) und es gilt

$$\begin{aligned}\lambda(C) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_C(x,y)\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_C(x,y)\, (d\lambda \otimes d\lambda)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

(10 Punkte). Da die Funktion g nicht-negativ ist, folgt aus der Vorlesung, dass es eine (messbare) Nullmenge N mit $g(x) = 0$ für alle $x \notin N$ gibt. Für $x \notin N$ und $C_x = \{y \in \mathbb{R} : |f(x,y)| > 1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt also

$$0 = g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{C_x}(y)\, d\lambda(y) = \lambda(C_x).$$

Also ist $\lambda(C_x) = 0$ für alle $x \notin N$ und damit $|f(x,\cdot)| \leq 1$ fast überall. Da zudem die Funktion $f(x,\cdot)$ nach der Vorlesung messbar ist, folgt $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ (5 Punkte).