UNIVERSITÄT ULM

Abgabe:

29.04.10, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

1. Es sei X ein Vektorraum und sowohl $\|\cdot\|$ als auch $\|\cdot\|'$ eine Norm auf X. Wir sagen, dass die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent sind (Schreibweise $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$), falls es Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gibt, sodass (5)

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\| \quad (x \in X).$$

Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent.

(ii) Eine Folge in X ist genau dann eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|$, wenn sie es bzgl. $\|\cdot\|'$ ist.

(iii) Eine Folge in X ist genau dann konvergent bzgl. $\|\cdot\|$, wenn sie es bzgl. $\|\cdot\|'$ ist.

Zeige weiter, dass $(X, \|\cdot\|)$ genau dann dann vollständig ist, wenn $(X, \|\cdot\|')$ vollständig ist, unter der Voraussetzung, dass die beiden Normen äquivalent sind.

2. Es sei $a < b$ und $C([a,b])$ die Menge aller stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass (1)

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} \quad (f \in C([a,b]))$$

eine Norm auf $C([a,b])$ definiert.

(b) Zeige, dass (1)

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \quad (f \in C([a,b]))$$

eine Norm auf $C([a,b])$ definiert.

(c) Es sei $x \in [a,b]$ und $\delta_x f := f(x)$. Zeige, dass $\delta_x : (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige lineare Abbildung ist und bestimme $\|\delta_x\|$. (2)

(d) Zeige, dass $\delta_a : (C([a,b], \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist. (2)

(e) Entscheide, ob die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent sind. (1)