Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 12

Alle Punkte dieses Blattes sind Zusatzpunkte!

28. Wir sagen, dass eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ im **Cesàro Mittel** gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, falls die Folge $A_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ gegen a konvergiert. (6)

(a) Es sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergente Folge. Zeige, dass (a_n) auch im Cesàro Mittel gegen a konvergiert.

(b) Finde eine divergente Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$, die im Cesàro Mittel konvergiert.

(c) Konstruiere eine beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$, die nicht im Cesàro Mittel konvergiert.

29. Wir betrachten den Raum $L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$, d.h. es ist (6)

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad (f \star g)(\cdot) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)g(\cdot - y)\,\mathrm{d}y$$

für alle $f, g \in L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$, wobei g entsprechend 2π-periodisch fortzusetzen ist. Für $f \in L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$ sind ihre Fourierkoeffizienten gegeben durch

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(-t)f(t)\,\mathrm{d}t \quad (k \in \mathbb{Z})$$

mit $e_k(t) := \exp(itk)$ und wir setzen $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e_k$. Ferner sei $D_n = \sum_{k=-n}^n e_k$ der **Dirichletkern**, $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n D_k$ der **Frejérkern** und $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n S_n(f)$ die Cesàro Mittel der Fourierreihe von f. Beweise folgende Aussagen.

(a) Es ist $S_n(f) = f \star D_n$ und $\sigma_n(f) = K_n \star f$ für alle $f \in L^1((0,2\pi),\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es ist $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$.