Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 13

Alle Punkte dieses Blattes sind Zusatzpunkte!

30. In dieser Aufgabe lösen wir die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$. Dazu betrachten wir den Funktionenraum W aller Funktionen $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(\cdot, x) \in C^1[0,\infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}$ für alle $t \geq 0$, wobei $\mathcal{S}$ den Schwartz-Raum bezeichne. (9)

Es sei eine Funktion $u_0 \in \mathcal{S}$ vorgegeben. Wir betrachten das Problem

$$\text{(WLG)} \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass jede Funktion $u \in W$, die das Problem (WLG) löst, der Bedingung

$$(\mathcal{F}u(t,\cdot))(x) = \exp(-x^2 t)(\mathcal{F}u_0)(x) \quad (t \in [0,\infty),\ x \in \mathbb{R})$$

genügt.

Hinweis: Betrachte die Funktion $v(t,x) := (\mathcal{F}u(t,\cdot))(x)$ und bestimme ihre Ableitung nach t.

(b) Finde eine Funktion $k \in W$ mit $(\mathcal{F}k(t,\cdot))(x) = \exp(-tx^2)$ für alle $t \in [0,\infty)$ und $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Benutze die inverse Fouriertransformation und ihren Fixpunkt $h(x) = \exp(-x^2/2)$.

(c) Finde eine Funktion $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(\cdot, x) \in C^1[0,\infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ für alle $t \geq 0$, die das Problem W löst.

31. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Linksshift $L_t : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, gegeben durch $(L_t f)(x) := f(x+t)$, auf dem Banachraum der stetigen Funktionen. (3)

(a) Zeige, dass $L_t \in \mathcal{L}(C(\mathbb{R}))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und bestimme $\|L_t\|$.

(b) Bestimme alle $f \in C(\mathbb{R})$, für die die Abbildung $T_f : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$, gegeben durch $T_f(t) := L_t f$, stetig ist.