Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2

3. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeige, dass $(E, \|\cdot\|)$ genau dann ein Banachraum ist, wenn jede absolut konvergente Reihe in E konvergiert. Dabei heißt eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in E *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. (6)

4. Es sei $(E, (\cdot \mid \cdot))$ ein Prähilbertraum und $F \subset E$. Zeige, dass $F^{\perp}$ ein abgeschlossener Teilraum von E ist. (3)

5. Betrachte den Prähilbertraum (3)

$$C[0, 2\pi] := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig}\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f \mid g) := \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad (f, g \in C[0, 2\pi]).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $e_n \in C[0, 2\pi]$ gegeben durch

$$e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(int) \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Zeige, dass die Familie $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ orthonormal ist.