UNIVERSITÄT ULM

Abgabe:

20.05.10, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 4

8. Wir betrachten den reellen Prähilbertraum (6)

$$C([-1,1]) := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$(f \mid g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeige, dass die Menge aller Monome $U := \{u_k(t) := t^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $C([-1,1])$ ist.

(b) Orthonormalisiere die Vektoren $\{u_0, u_1, u_2\}$ mit dem Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren.

9. Es seien E und F reelle Prähilberträume. (6)

(a) Zeige, dass

$$(x \mid y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \quad (x, y \in E).$$

Dies nennt man die **Polarisationsgleichung**.

(b) Eine Abbildung $U : E \to F$ heißt isometrisch, falls $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in E$. Zeige, dass eine surjektive lineare Abbildung $U : E \to F$ genau dann unitär ist, wenn sie isometrisch ist.

Bemerkung: In einem komplexen Prähilberträum E gilt die folgende Polarisationsgleichung:

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2) \quad (x, y \in E).$$

Die Aussage aus Aufgabenteil (b) bleibt auch im komplexen Fall richtig.