Universität Ulm

Abgabe:

29.04.10, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

1. Es sei X ein Vektorraum und sowohl $\|\cdot\|$ als auch $\|\cdot\|'$ eine Norm auf X. Wir sagen, dass die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent sind (Schreibweise $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$), falls es Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gibt, sodass (5)

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\| \quad (x \in X).$$

Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent.

(ii) Eine Folge in X ist genau dann eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|$, wenn sie es bzgl. $\|\cdot\|'$ ist.

(iii) Eine Folge in X ist genau dann konvergent bzgl. $\|\cdot\|$, wenn sie es bzgl. $\|\cdot\|'$ ist.

Zeige weiter, dass $(X, \|\cdot\|)$ genau dann dann vollständig ist, wenn $(X, \|\cdot\|')$ vollständig ist, unter der Voraussetzung, dass die beiden Normen äquivalent sind.

Lösung:

$(i) \Rightarrow (ii), (iii)$: Es seien $\alpha, \beta > 0$ gegeben, sodass

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\| \quad (x \in X).$$

Dann ist auch

$$\frac{1}{\beta} \|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|' \quad (x \in X).$$

Somit ist jede Cauchyfolge/konvergente Folge in $(X, \|\cdot\|)$ auch eine Cauchyfolge/konvergente Folge in $(X, \|\cdot\|')$ und umgekehrt.

$(ii), (iii) \Rightarrow (i)$: Wir zeigen zunächst, dass es ein $\beta > 0$ gibt, sodass

$$\|x\|' \leq \beta \|x\| \quad (x \in X).$$

Andernfalls gibt es eine Folge $(x_n) \subset X$ mit $\|x_n\|' \geq n^2 \|x_n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $y_n := n \frac{x_n}{\|x_n\|'}$. Dann ist

$$\|y_n\| = n \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|'} \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und deshalb konvergiert y_n bzgl. $\|\cdot\|$ gegen 0. Nach Voraussetzung ist y_n auch bzgl. $\|\cdot\|'$ konvergent bzw. eine Cauchyfolge und insbesondere beschränkt. Dies steht aber im Widerspruch zu $\|y_n\|' = n$.

Durch Vertauschen der Rollen von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ erhalten wir, dass auch ein $\alpha > 0$ mit

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|' \quad (x \in X)$$

existiert.

Es seien nun die beiden Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent und $(X, \|\cdot\|)$ vollständig. Ferner sei $(x_n) \subset X$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|')$. Wir haben gesehen, dass dann (x_n) auch eine Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|)$ ist und somit konvergent. Somit konvergiert (x_n) auch in $(X, \|\cdot\|')$, also ist $(X, \|\cdot\|')$ vollständig. Durch Vertauschung von $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, \|\cdot\|')$ folgt die Umkehrung.

2. Es sei $a < b$ und $C([a,b])$ die Menge aller stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass (1)

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} \quad (f \in C([a,b]))$$

eine Norm auf $C([a,b])$ definiert.

(b) Zeige, dass (1)

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \quad (f \in C([a,b]))$$

eine Norm auf $C([a,b])$ definiert.

(c) Es sei $x \in [a,b]$ und $\delta_x f := f(x)$. Zeige, dass $\delta_x : (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige lineare Abbildung ist und bestimme $\|\delta_x\|$. (2)

(d) Zeige, dass $\delta_a : (C([a,b], \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist. (2)

(e) Entscheide, ob die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent sind. (1)

Lösung:

$(a), (b)$ Die Eigenschaften einer Norm rechnet man leicht nach.

(c) Offenbar ist δ_x linear. Wegen

$$\|\delta_x f\| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty, \quad (f \in C([a,b])),$$

ist δ_x ein beschränkter und somit stetiger Operator mit $\|\delta_x\| \leq 1$. Da die konstante Einsfunktion auf $[a,b]$ stetig ist und $\delta_x \mathbb{1} = 1 = \|\mathbb{1}\|_\infty$, erhalten wir, dass $\|\delta_x\| \geq 1$. Also ist $\|\delta_x\| = 1$.

(d) Betrachte die stetigen Funktionen

$$f_n(y) := \begin{cases} n^2(a + \frac{1}{n} - y) & a \leq y \leq a + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\|f_n\|_1 \leq 1$ aber $\delta_a f_n = n$.

(e) Wären die Normen äquivalent, so wäre die Folge (f_n) aus dem vorherigen Aufgabenteil in der Supremumsnorm beschränkt. Dies ist aber offenbar nicht der Fall.