Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

# Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11

**25.** Berechne folgende Funktionen: (4)

(a) $f \star g$, wobei $f := \mathbb{1}_{[a,b]}$ und $g := \mathbb{1}_{[c,d]}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $c < d$.

(b) $\mathcal{F}f(a\,\cdot)$, wobei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $a > 0$.

**Lösung:**

(a) Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $b-a \leq d-c$. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x-y)\mathbb{1}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-b,-a]}(y-x)\mathbb{1}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-b,x-a]}(y)\mathbb{1}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-b,x-a]\cap[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Durch Trennung der verschiedenen Fälle erhält man

$$(f \star g)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c+a \text{ oder } x \geq b+d \\ b-a & x \geq c+b \text{ und } x \leq d+a \\ x-a-c & x \geq c+a \text{ und } x \leq c+d \\ d+b-x & x \geq a+d \text{ und } x \leq b+d \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(b) Es ist

$$(\mathcal{F}f(a\,\cdot))(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ixy)f(ay)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \exp(-ixy/a)f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a}(\mathcal{F}f)(x/a).$$

Eine **Algebra** ist ein Vektorraum $\mathcal{A}$ mit einer bilinearen Abbildung (innerem Produkt)

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y =: xy,$$

sodass $(xy)z = x(yz)$ für alle $x,y,z \in \mathcal{A}$. Falls $xy = yx$ für alle $x,y \in \mathcal{A}$, so heißt $\mathcal{A}$ **kommutativ**. Eine Algebra $\mathcal{A}$ versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt **normierte Algebra**, falls $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ für alle $x,y \in \mathcal{A}$. Eine vollständige normierte Algebra heißt **Banachalgebra**. Eine Element $e \in \mathcal{A}$ einer normierten Algebra $\mathcal{A}$ heißt **Einheit**, falls $\|e\| = 1$ und $e = xe = ex$ für alle $x \in \mathcal{A}$.

**26.** Entscheide, ob es sich bei folgenden Strukturen um eine Algebra, normierte Algebra oder Banachalgebra handelt und ob diese kommutativ ist und eine Einheit besitzt. (6)

(a) $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ mit der Komposition als innerem Produkt und der Operatornorm, wobei $H$ ein unendlich dimensionaler Hilbertraum ist.

(b) $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R})$ mit der Faltung als innerem Produkt.

**Lösung:**

1. Wir wissen bereits, dass $\mathcal{A}$ ein Banachraum ist. Wegen

$$\|TSx\| \leq \|T\|\|Sx\| \leq \|T\|\|S\|\|x\| \quad (x \in H)$$

ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Um zu sehen, dass $\mathcal{A}$ nicht kommutativ ist, wähle $u, v \in H$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$ und $(u \mid v) = 0$. Die beiden beschränkten Operatoren $Tx := ((x \mid u + v))u$ und $Sx := (x \mid v)u$ kommutieren nicht, denn

$$STv = S(\|v\|^2 u) = Su = 0 \neq u = T(\|v\|^2 u) = TSv.$$

Der Identische Operator $I$ ist eine Einheit von $\mathcal{A}$.

2. Wir haben schon gesehen, dass $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ keine Einheit besitzt. Dazu nehmen wir an, dass eine Einheit $e \in L^1(\mathbb{R})$ existiert Wegen $\mathcal{F}e = \mathcal{F}(e \star e) = (\mathcal{F}e)^2$ nimmt die Funktion $\mathcal{F}e$ nur die Werte 0 und 1 an. Da $\mathcal{F}e \in C_0(\mathbb{R})$, folgt $\mathcal{F}e = 0$. Dann ist aber

$$\mathcal{F}f = \mathcal{F}(f \star e) = \mathcal{F}f\mathcal{F}e = 0 \quad (f \in L^1(\mathbb{R})),$$

was nicht sein kann (z.B. weil $\mathcal{F}$ einen von Null verschiedenen Fixpunkt besitzt).

**27.** Es sei $\mathcal{S}$ der Schwartz-Raum. Zeige, dass $\mathcal{S}$ versehen mit der punktweisen Multiplikation $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$ eine Algebra ist. (2)

**Lösung:** Es seien $f, g \in \mathcal{S}$. Es ist nur zu zeigen, dass das Produkt $f \cdot g$ wieder in $\mathcal{S}$ enthalten ist. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist offenbar

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |(f \cdot g)^{(n)}(x)| \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(j)}(x)||f^{(n-j)}(x)| < \infty.$$