Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 13

Alle Punkte dieses Blattes sind Zusatzpunkte!

30. In dieser Aufgabe lösen wir die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$. Dazu betrachten wir den Funktionenraum W aller Funktionen $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(\cdot, x) \in C^1[0,\infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}$ für alle $t \geq 0$, wobei $\mathcal{S}$ den Schwartz-Raum bezeichne. (9)

Es sei eine Funktion $u_0 \in \mathcal{S}$ vorgegeben. Wir betrachten das Problem

$$\text{(WLG)} \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass jede Funktion $u \in W$, die das Problem (WLG) löst, der Bedingung

$$(\mathcal{F}u(t,\cdot))(x) = \exp(-x^2 t)(\mathcal{F}u_0)(x) \quad (t \in [0,\infty),\ x \in \mathbb{R})$$

genügt.

Hinweis: Betrachte die Funktion $v(t,x) := (\mathcal{F}u(t,\cdot))(x)$ und bestimme ihre Ableitung nach t.

(b) Finde eine Funktion $k \in W$ mit $(\mathcal{F}k(t,\cdot))(x) = \exp(-tx^2)$ für alle $t \in [0,\infty)$ und $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Benutze die inverse Fouriertransformation und ihren Fixpunkt $h(x) = \exp(-x^2/2)$.

(c) Finde eine Funktion $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(\cdot, x) \in C^1[0,\infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ für alle $t \geq 0$, die das Problem W löst.

Lösung:

(a) Es sei $u \in W$ eine Lösung von (WLG). Setze $v(t,x) := (\mathcal{F}u(t,\cdot))(x)$ für $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$v_t(t,x) = (\mathcal{F}u_t(t,\cdot))(x) = -x^2(\mathcal{F}u(t,\cdot)) = -x^2 v(t,x) \quad (t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(v(t,x)\exp(x^2 t)\Big) = v_t(t,x)\exp(x^2 t) + v(t,x)x^2\exp(x^2 t) = 0 \quad (t \geq 0,\ x \in \mathbb{R})$$

ist $v(t,x) = c(x)\exp(-x^2 t)$ für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit einer von x abhängingen Konstanten $c(x)$. Mit $t = 0$ sehen wir, dass $c(x) = v(0,x) = (\mathcal{F}(u(0,\cdot))(x)$ und die Behauptung ist bewiesen.

(b) Es sei $g(t,x) := \exp(-x^2 t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} k(t,x) := (\mathcal{F}^{-1}g(t,\cdot))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(ixy)\exp(-y^2 t)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \exp(ixz/\sqrt{2t})\exp(-z^2/2)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}}(\mathcal{F}^{-1}h)(x/\sqrt{2t}) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\exp(-x^2/4t) \end{aligned}$$

die gesucht Funktion, wobei $h(x) = \exp(-x^2/2)$ ein Fixpunkt der Fouriertransformation ist.

(c) Nach den bisherigen Aufgabenteilen muss für jede Lösung $u \in W$ von (WLG) gelten, dass

$$\mathcal{F}u(t,\cdot) = \mathcal{F}k(t,\cdot)\mathcal{F}u_0.$$

Also ist $\sqrt{2\pi}u(t,x) := (k(t,\cdot) \star u_0)(x)$ ein vielversprechender Kandidat. Dies liefert

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(- \frac{(x-y)^2}{4t}\Big) u_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

Wegen

$$u_x(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{4t}\Big) \frac{-2(x-y)}{4t} u_0(y)\,\mathrm{d}y$$

ist

$$u_{xx}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{4t}\Big)\Big(\frac{(x-y)^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\Big) u_0(y)\,\mathrm{d}y = u_t(t,x)$$

für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus kann man zeigen, dass $\lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = u_0(x)$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$.

31. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Linksshift $L_t : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, gegeben durch $(L_t f)(x) := f(x+t)$, auf dem Banachraum der stetigen Funktionen. (3)

(a) Zeige, dass $L_t \in \mathcal{L}(C(\mathbb{R}))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und bestimme $\|L_t\|$.

(b) Bestimme alle $f \in C(\mathbb{R})$, für die die Abbildung $T_f : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$, gegeben durch $T_f(t) := L_t f$, stetig ist.

Lösung:

(a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\|L_t f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\| \quad (f \in C(\mathbb{R})).$$

Somit ist $L_t : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ isometrisch, insbesondere also stetig mit $\|L_t\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Zunächst sei $f \in C(\mathbb{R})$ derart, dass die Abbildung T_f stetig ist. Die Stetigkeit in 0 besagt gerade, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|t| < \delta$ impliziert dass

$$\|f(x) - f(x+t)\| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - f(x+t)| < \varepsilon \;\forall x \in \mathbb{R}.$$

Dies bedeutet, dass die Funktion f gleichmäßig stetig ist.

Sei nun $f \in C(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - t_0| < \delta$ ist also

$$\|L_{t_0} f - L_t f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t_0) - f(x+t)| < \varepsilon,$$

d.h. T_f ist stetig in t_0.