Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 3

6. Wir betrachten den Prähilbertraum

$$C_{2\pi} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und stetig}\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f \mid g) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t \quad (f, g \in C_{2\pi})$$

und der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(t) := \exp(int)$.

Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist $f \in C_{2\pi}$ stetig differenzierbar, so besitzt f' die Fourierreihe (2)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ik(f \mid e_k)e_k.$$

(b) Ist $f \in C_{2\pi}$ zweimal stetig differenzierbar, so existiert ein $M > 0$ mit (2)

$$|(f \mid e_k)| \leq \frac{M}{k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

(c) Ist $f \in C_{2\pi}$ zweimal stetig differenzierbar, so konvergiert ihre Fourierreihe gleichmäßig gegen f, d.h. (4)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} (f \mid e_k)e_k$$

existiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und stimmt mit f überein.

Lösung:

(a) Es sei $f \in C_{2\pi}$ stetig differenzierbar. Mit partieller Integration erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}(f' \mid e_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \exp(-ikt)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\Big[f(t)\exp(-ikt)\Big]_{t=0}^{2\pi} + ik \int_0^{2\pi} f(t)\exp(-ikt)\, \mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\exp(-ikt)\, \mathrm{d}t = ik(f \mid e_k)\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Nach Teil (a) ist $-k^2(f \mid e_k) = (f'' \mid e_k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Da f'' stetig und 2π-periodisch ist, existiert ein $M > 0$ mit $|f''(t)| \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit ist

$$\begin{aligned}\left|-k^2(f \mid e_k)\right| &= \left|(f'' \mid e_k)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)\exp(-ikt)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}2\pi M = M \quad (k \in Z)\end{aligned}$$

und also $|(f \mid e_k)| \leq \frac{M}{k^2}$ für alle $k \neq 0$.

(c) Wir zeigen zunächst, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert, d.h. eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ist. Es sei

$$F_n = \sum_{k=-n}^{n} (f \mid e_k)e_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}\|F_m - F_n\|_\infty &= \left\|\sum_{k=-m}^{-n-1}(f \mid e_k)e_k + \sum_{k=n+1}^{m}(f \mid e_k)e_k\right\|_\infty \\ &\leq \sum_{k=-m}^{-n-1}\|(f \mid e_k)e_k\|_\infty + \sum_{k=n+1}^{m}\|(f \mid e_k)e_k\|_\infty \\ &= 2\sum_{k=n+1}^{m}\frac{M}{k^2} \\ &\leq \frac{2}{M}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Somit konvergiert die Fourierreihe gegen eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Wir zeigen nun, dass $g = f$.

Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned}|g(0) - g(2\pi)| &\leq |g(0) - F_n(0)| + |F_n(0) - F_n(2\pi)| + |F_n(2\pi) - g(2\pi)| \\ &= |g(0) - F_n(0)| + |F_n(2\pi) - g(2\pi)| \quad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

sieht man sofort, dass g 2π-periodisch ist und wegen

$$\|h\|^2 = (h \mid h) \leq \|h\|_\infty^2 \quad (h \in C_{2\pi})$$

konvergiert F_n insbesondere bzgl $\|\cdot\|$ gegen g. Aus

$$\|f - g\| \leq \|f - F_n\| + \|F_n - g\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

erhalten wir nun, dass $f = g$.

7. Bestimme alle zweimal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f'' = -f$. (4)

Hinweis: Vergleiche die Fourierkoeffizienten von f'' und $-f$.

Lösung: Wir betrachten wieder den Prähilbertraum $C_{2\pi}$ aus der vorherigen Aufgabe und es sei $f \in C_{2\pi}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'' = -f$. Aus der Eindeutigkeit der Fourierreihendarstellung und aus der vorherigen Aufgabe folgt nun, dass

$$-k^2(f \mid e_k) = (f'' \mid e_k) = -(f \mid e_k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Also ist $(f \mid e_k) = 0$ für alle $k \notin \{-1, 1\}$ und somit f von der Form

$$f(t) = a \exp(-it) + b \exp(it) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

für gewisse $a, b \in \mathbb{C}$. Andererseits ist jede Funktion der Form (1) eine Lösung der Gleichung $f'' = -f$. Somit haben wir alle 2π-periodischen Lösungen bestimmt.