Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 5

10. Es sei E ein normierter Vektorraum. Zeige, dass folgende Aussagen gelten. (6)

(a) Es seien $A, B \subset E$ Untervektorräume mit $E = A \oplus B$. Dann gibt es eine lineare Projektion $P : E \to E$ mit $PE = A$ und $\ker P = B$.

(b) Sei $P : E \to E$ eine lineare Projektion. Dann ist $E = PE \oplus \ker P$.

(c) Es sei $P : E \to E$ eine stetige lineare Projektion. Dann sind PE und $\ker P$ abgeschlossene Teilräume von E.

(d) Die Zerlegung $E = A \oplus B$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig, d.h. für einen Teilraum $A \subset E$ kann es mehrere verschiedene Teilräume $B \subset E$ mit $E = A \oplus B$ geben. Insbesondere ist die Projektion aus Aufgabenteil (a) im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung gibt es für jedes $x \in E$ eindeutig bestimmte $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$ mit $x = x_1 + x_2$. Wir definieren nun die Abbildung $P : E \to E$ durch $P(x) := x_1$. Um zu sehen, dass P linear ist, seien $x, y \in E$ mit entsprechenden $x_1, y_1 \in A$ und $x_2, y_2 \in B$. Da A und B Vektorräume sind, ist $x_1 + y_1 \in A$, $x_2 + y_2 \in B$ und

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2).$$

Weil die Summe von A und B direkt ist, ist $P(x+y) = x_1 + y_2$ eindeutig bestimmt. Ebenso sieht man, dass $P(\alpha x) = \alpha P(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in E$ und offenbar ist $P^2 = P$, $PE = A$ und $B \subset \ker P$. Ist umgekehrt $x \in \ker P$ und $x = x_1 + x_2 \in A \oplus B$, so folgt $0 = Px = x_1$ und also $x = x_2 \in B$.

(b) Da P eine Projektion ist, ist $(I-P)E \subset \ker P$ und andererseits ist $x = (I-P)x \in (I-P)E$ für jedes $x \in \ker P$. Also ist $\ker P = (I-P)E$.

Sei nun $P : E \to E$ eine Projektion mit $PE = A$. Setze $B = (I-P)E = \ker P$. Wegen $x = Ix = Px + (I-P)x$ ist $E = A + B$. Sei nun $x \in A \cap B$, d.h. es gibt $y, z \in E$ mit $x = Py = (I-P)z$. Dann ist $Px = (P - P^2)z = (P-P)z = 0$ und also $Px = P^2y = Py = x = 0$.

(c) Ist P stetig, so auch $I-P$. Nach Teil (b) sind somit $\ker P$ und $PE = \ker(I-P)$ abgeschlossen Teilräume.

(d) Man betrachte z.B. $E = \mathbb{R}^2$ und $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Dann ist sowohl $B = \{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}$ als auch $B = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ komplementär zu A.

Erinnerung: Eine Abbildung $P : E \to E$ heißt **Projektion**, falls $P^2 := P \circ P = P$.

Bemerkung: Die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil (c) ist ebenfalls richtig.

11. Sei H ein Hilbertraum und $U \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeige, dass eine lineare Projektion $P : H \to H$ mit $PH = U$ genau dann orthogonal ist, d.h. $\ker P = U^\perp$, wenn $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ für alle $x, y \in E$. (2)

Lösung: Sei $P : H \to H$ die orthogonale Projektion auf U und $x, y \in H$. Mit $x = Px+(I-P)x$ und $y = Py + (I - P)y$ erhält man

$$(Px \mid y) = (Px \mid Py + (I - P)y) = (Px \mid Py) = (Px + (I - P)x \mid Py) = (x \mid Py).$$

Sei nun $P : H \to H$ eine Projektion mit $PE = U$ und $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ für alle $x, y \in H$. Dann ist

$$((I - P)x \mid Py) = ((I - P)x \mid P^2y) = (P(I - P)x \mid Py) = 0 \quad (x, y \in H).$$

Also $\ker P = (I - P)E = U^{\perp}$.

12. Wir betrachten den Hilbertraum l^2 der quadratisch summierbaren Folgen. Es sei (4)

$$C := \{x = (x_n) \in l^2 : 0 \leq x_n \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der Folgen aus l^2, deren Einträge zwischen 0 und 1 liegen.

(a) Zeige, dass C abgeschlossen und konvex ist.

(b) Bestimme die orthogonale Projektion auf C.

Lösung:

(a) Es seien $x, y \in C$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist

$$0 \leq \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist C konvex. Wegen

$$|x_n| = \sqrt{x_n{}^2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

konvergiert jede in l^2 konvergente Folge auch komponentenweise. Da $[0, 1]$ abgeschlossen ist, ist somit auch C abgeschlossen.

(b) Für $x = (x_n) \in l^2$ definiere

$$(Px)_n = \begin{cases} x_n & x_n \in [0, 1] \\ 0 & x_n < 0 \\ 1 & x_n > 1 \end{cases}.$$

Dann ist die so gegebene Abbildung $P : l^2 \to l^2$ die orthogonale Projektion auf C: Offenbar ist P eine Projektion und wegen $|(Px)_n| \leq |x_n|$ ist $Px \in C \subset l^2$ für alle $x \in l^2$. Gäbe es $y \in C$ mit $\|x - y\| < \|x - Px\|$, dann wäre auch $|x_n - y_n| < |x_n - (Px)_n|$ für ein $n \in \mathbb{N}$, was nicht möglich ist. Also ist

$$\|x - Px\| \leq \|x - y\| \quad (y \in C).$$